Bayesowska Teoria Inversji
w zastosowaniach geofizycznych

Wojciech Dębski

debski@igf.edu.pl

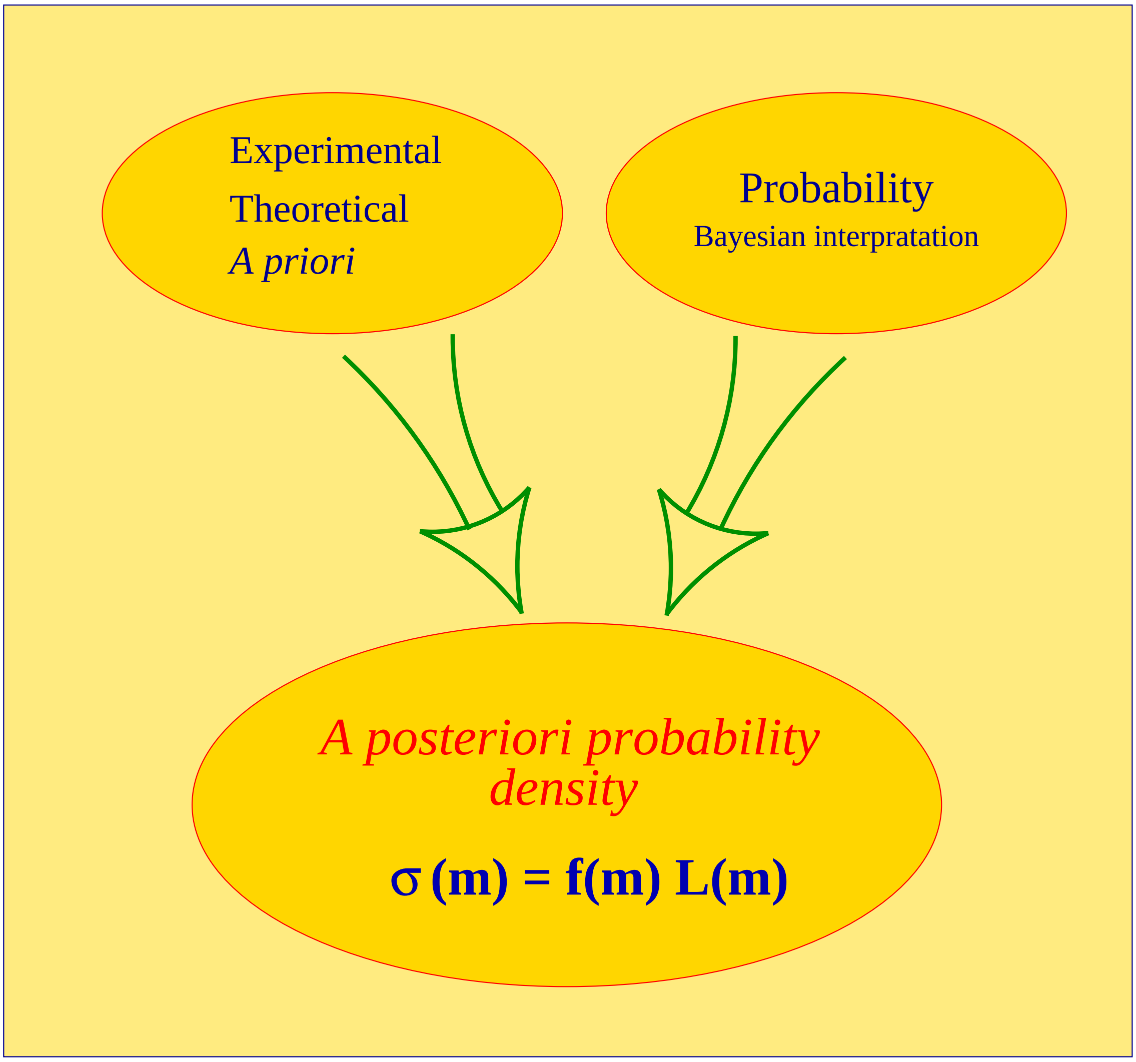
23 października 2000

Plan seminarium

- Nieco teorii
  - Podstawy
  - Prawdopodobieństwo
  - Matematyka ...
- Zastosowania w sejsmologii i sejsmice
  - Lokalizacja
  - AVO
  - Tomografia
- Inne zastosowania geofizyczne
  - Inwersja elektryczno-oporowa
  - Inwersja pola grawitacyjnego
  - Inwersja elektromagnetyczna
  - ...
- Inwersja Bayesowska a metody klasyczne

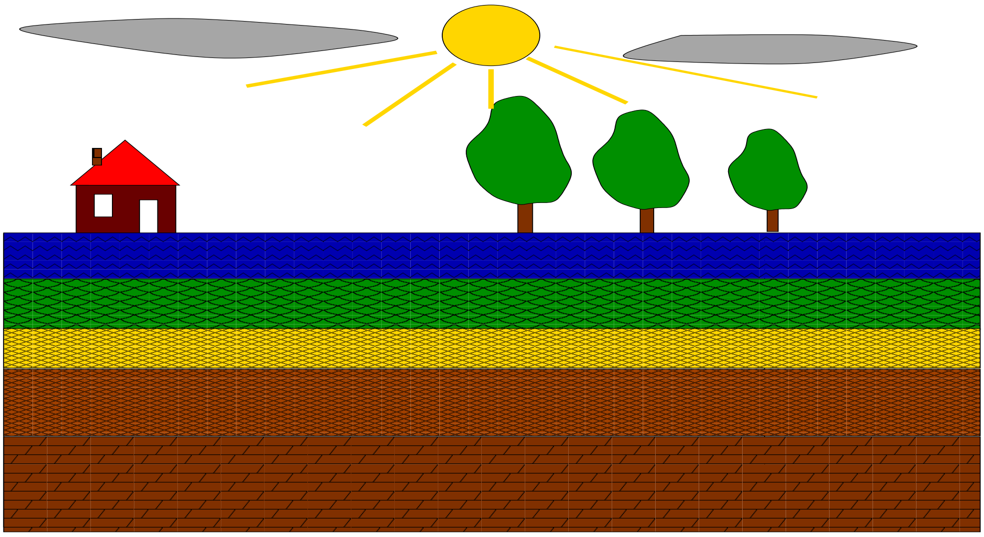
Inwersja Bayesowska

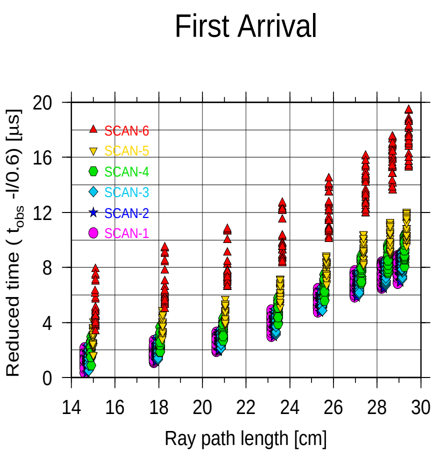
Podstawy

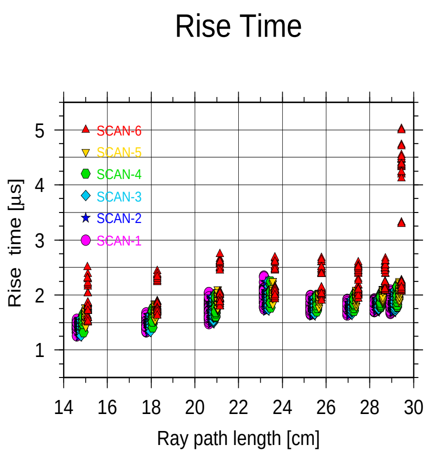


Inwersja Bayesowska

Informacje *a priori*/ pomiarowe

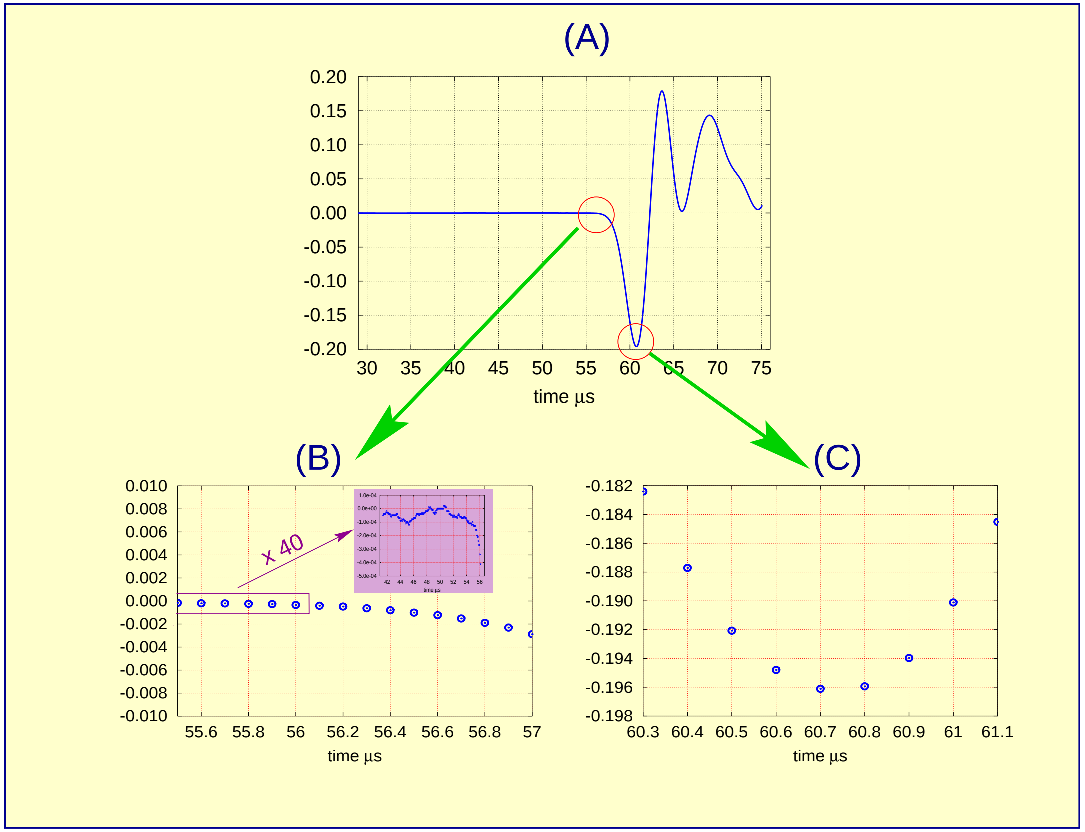






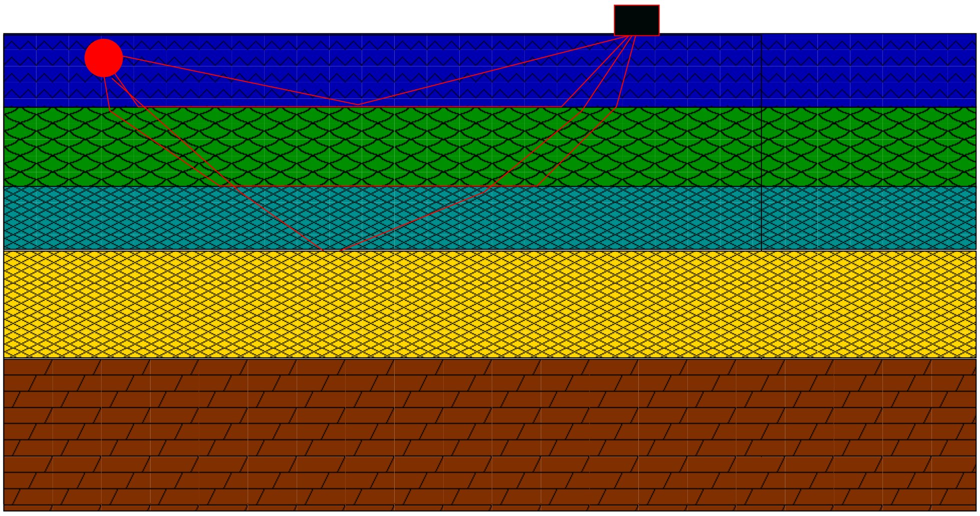
Inwersja Bayesowska

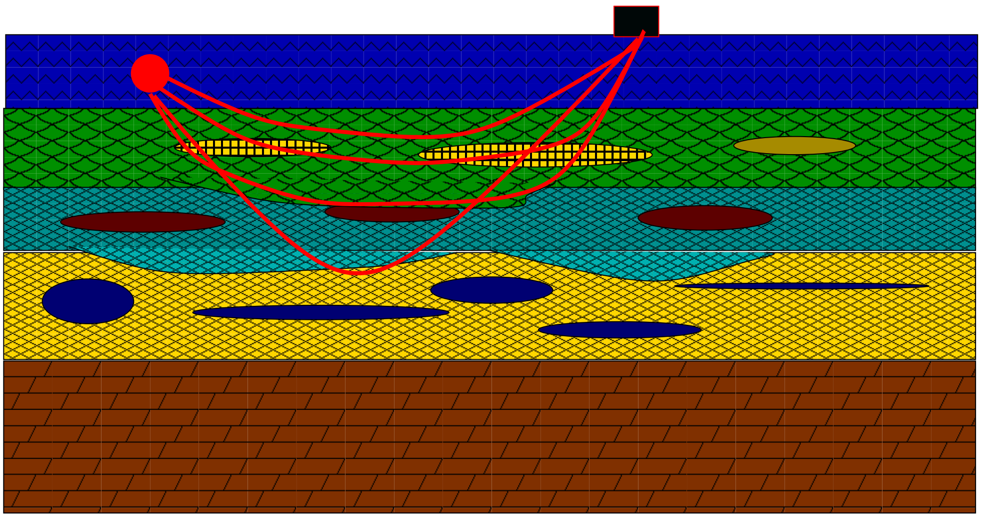
Błędy pomiarowe



Inwersja Bayesowska

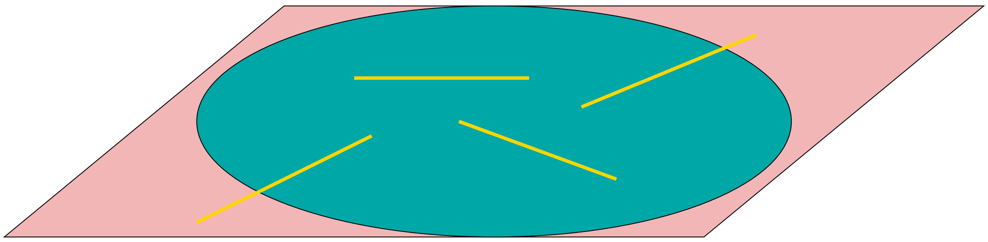
Błędy teoretyczne



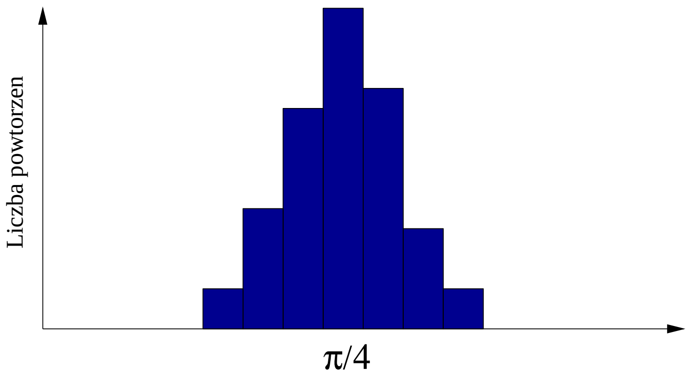


Prawdopodobieństwo

Interpretacja I.



$$p = Np/N$$



Prawdopodobieństwo

Interpretacja II.

Inwersja Bayesowska

Rozkład *a posteriori*

A posteriori pdf

$$\sigma(\mathbf{m}) = f(\mathbf{m}) L(\mathbf{m}, \mathbf{d})$$

- f - a priori pdf (prob. dens. funct.)
- L - funkcja podobieństwa

Błędy niezależne od $\mathbf{m}$ and $\mathbf{d}$

$$\mathbf{d}^{th} = \mathbf{g}(\mathbf{m})$$

$$\sigma(\mathbf{m}) = f(\mathbf{m}) \exp\left(-||\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{g}(\mathbf{m})||\right)$$

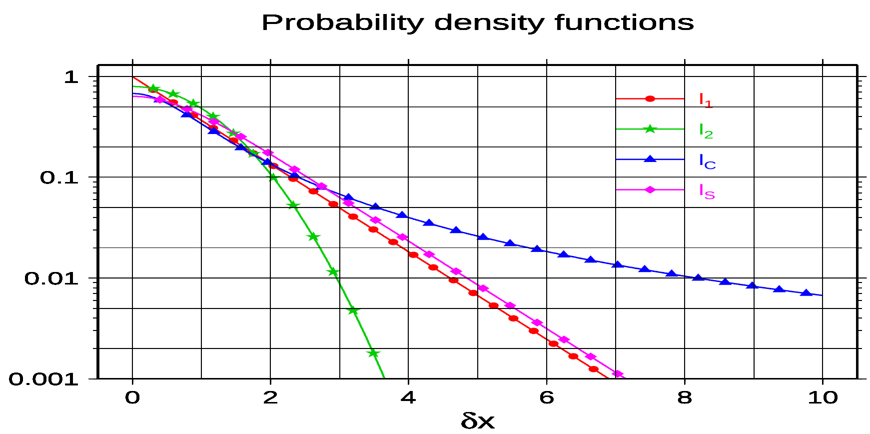
$|| \cdot ||$ - norma w przestrzeni D

Inwersja Baysowska

normy

Normy

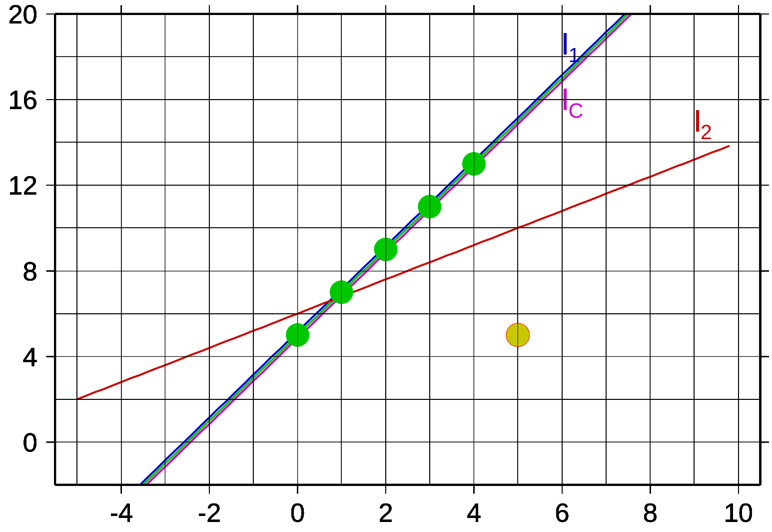
- l_1: $||\mathbf{x}||_{l_1} = \sum_i \left|\frac{x_i}{s_i}\right|$
- l_2: $||\mathbf{x}||_{l_2} = \frac{1}{2}\sum_i x^i C_{ij}^{-1} x^j$
- l_c: $||\mathbf{x}||_{l_c} = \sum_i \log\left[1 + \left(\frac{x_i}{s_i}\right)^2\right]$
- l_s: $||\mathbf{x}||_{l_s} = \sum_i \log\left[\cosh\left(\frac{x_i}{s_i}\right)\right]$



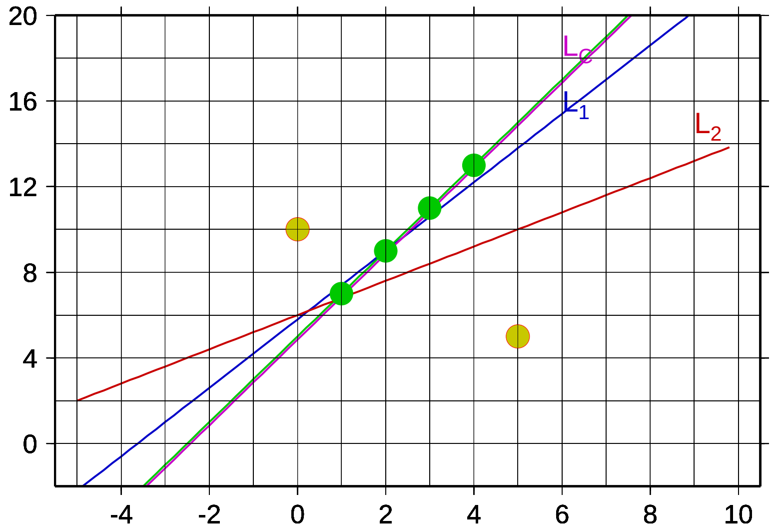
Tomografia

wiarygodność dopasowania

1 outage



2 outages



Inwersja Baysowska

Przykład: rozkłady Gaussowskie

$$f(\mathbf{m}) = \exp\left(-\frac{1}{2}(\ m_a - m)^T \mathbf{C}_M^{-1}(\mathbf{m}_a - m)\right)$$

$$L(\mathbf{m}) = \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{d} - \mathbf{G}\cdot m)^T \mathbf{C}_D^{-1}(\mathbf{d} - \mathbf{G}\cdot m)\right)$$

$$\sigma(\mathbf{m}) \sim \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{m}_a - m_{ml})^T \mathbf{C}_A^{-1}(\mathbf{m}_a - m_{ml})\right)$$

$$\mathbf{C}_A = \left(\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{C}_D^{-1} \cdot \mathbf{G} + \mathbf{C}_M^{-1}\right)^{-1}$$

$$\mathbf{m}_{ml} = m_a + \mathbf{C}_A \cdot \mathbf{G}^T \mathbf{C}_D^{-1} \cdot (\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{G}\cdot \mathbf{m}_a)$$

Inwersja Baysowska

Metody rozwiązywania

- Obliczenie $\sigma(\mathbf{m})$
  - rozwiązanie analityczne
  - systematyczne przeszukiwanie przestrzeni modeli
  - random metody Monte Carlo

- Rozwiązanie najbardziej prawdopodobne
  - optymalizacja iteracyjna
  - optymalizacja globalna

- Analiza rozdzielczośći/korelacji
  - macierz kowariancji *a posteriori*
  - operator rozdzielczości

Lokalizacja

- Standardowa lokalizacja
- Oszacowanie dokładności
- Analiza ważności danych

$$g(x,y,z,t_o) \approx \exp\left(-||t^{obs} - t^{th}||\right)$$

$$p(x) = \int\limits_{y,z,t_o} g(x,y,z,t_o)dydzdt_o$$

$$p(y) = \int\limits_{x,z,t_o} g(x,y,z,t_o)dxdzdt_o$$

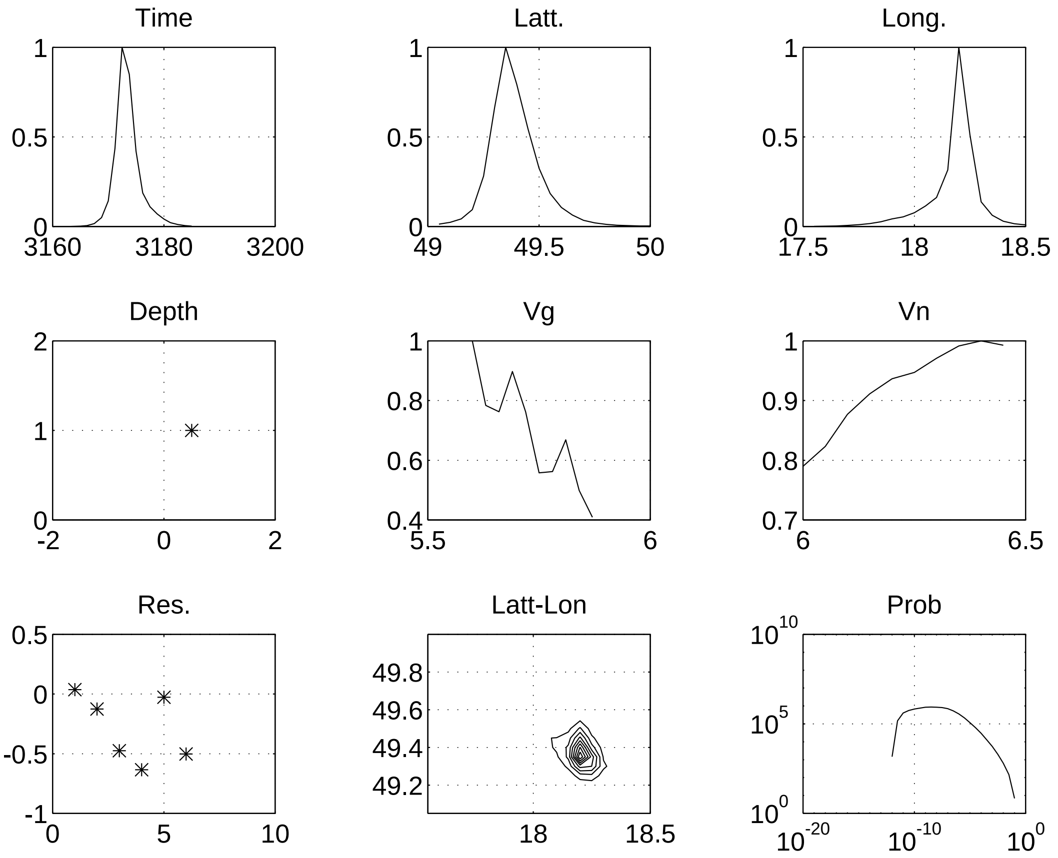
$$\vdots$$

$$p(x,y) = \int\limits_{z,t_o} g(x,y,z,t_o)dzdt_o$$

$$\vdots$$

Lokalizacja

a posteriori pdf

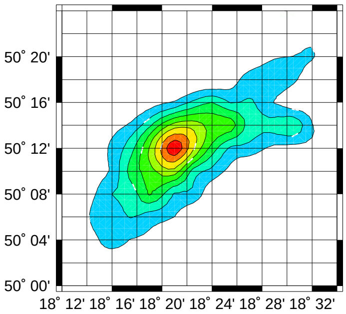


Location of event 3.08.1995 (19.53) (X)

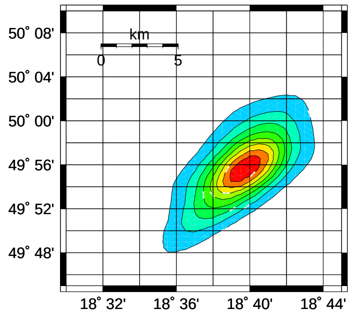
Lokalizacja

lokalizacja epicentrów (2D pdf)

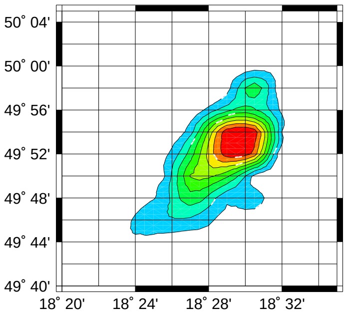
Aug.03,1995



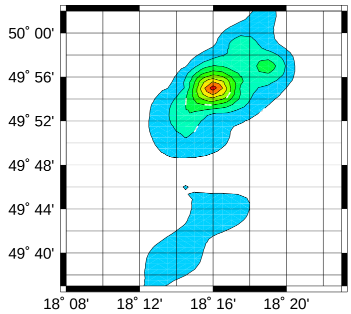
Nov.11,1995



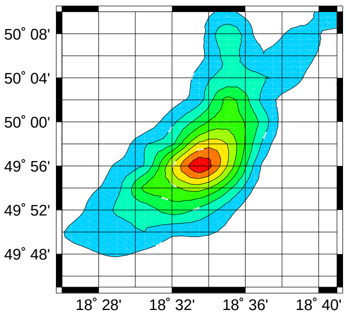
Nov.17,1995

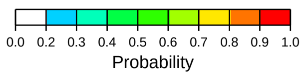


Oct.10,1995



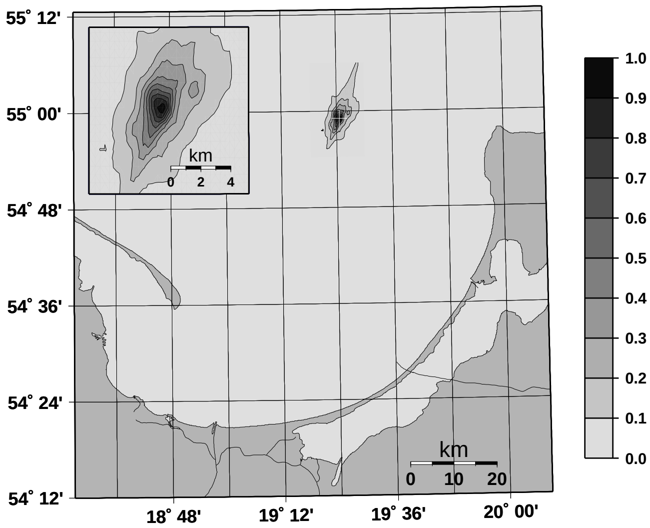
Oct.10,1995

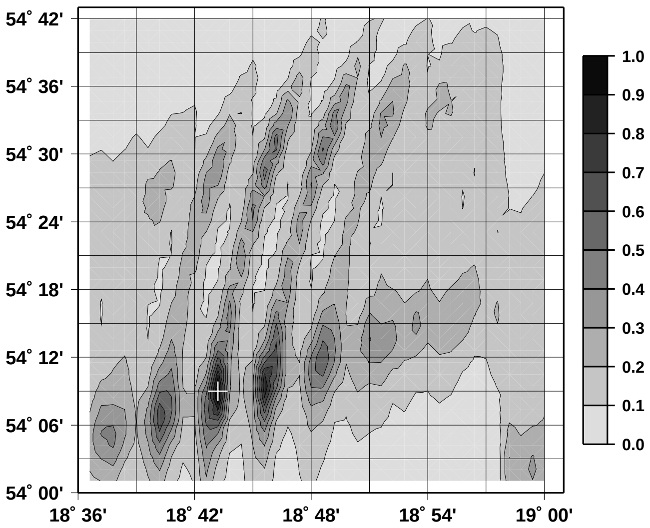




Lokalizacja

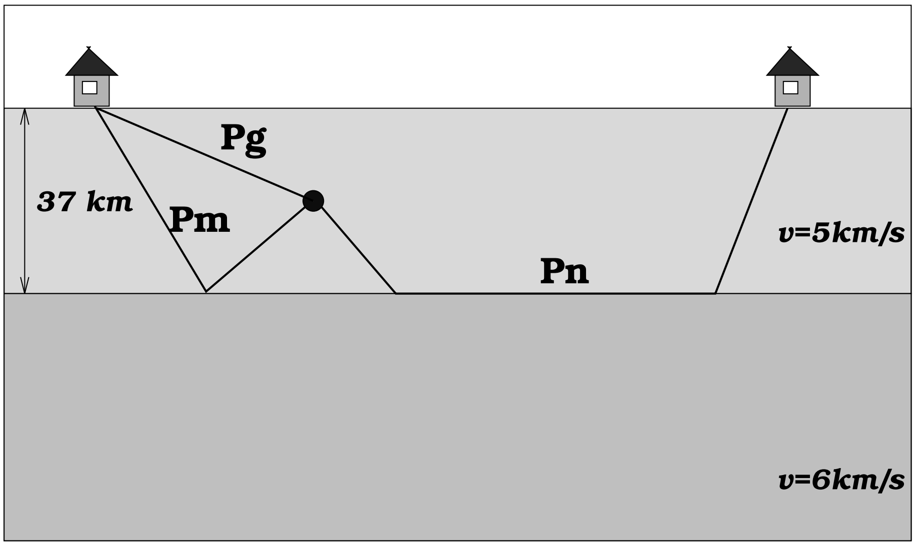
oszacowanie błędów

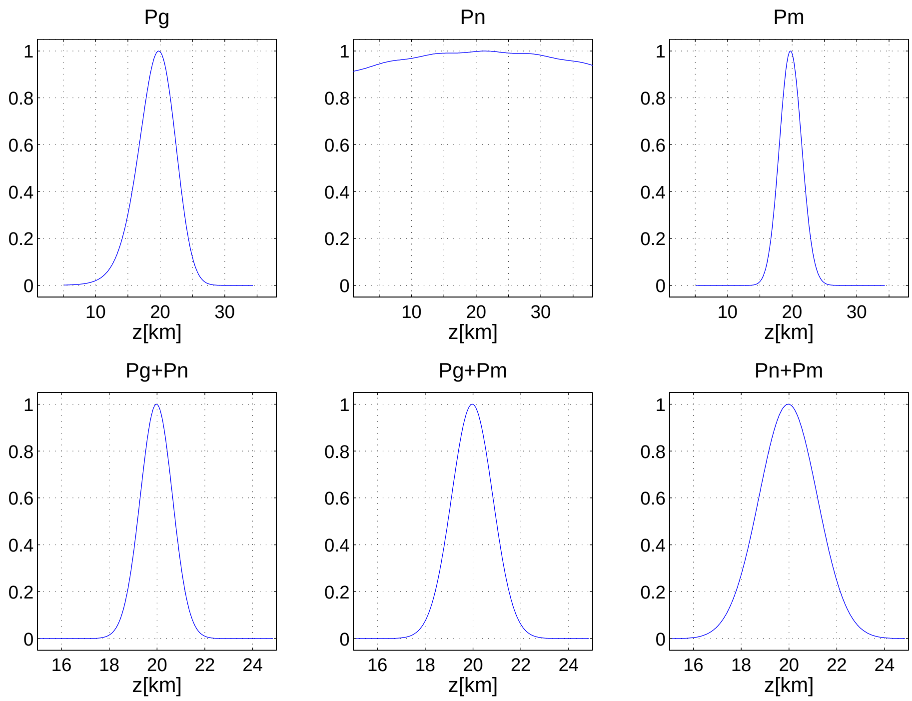




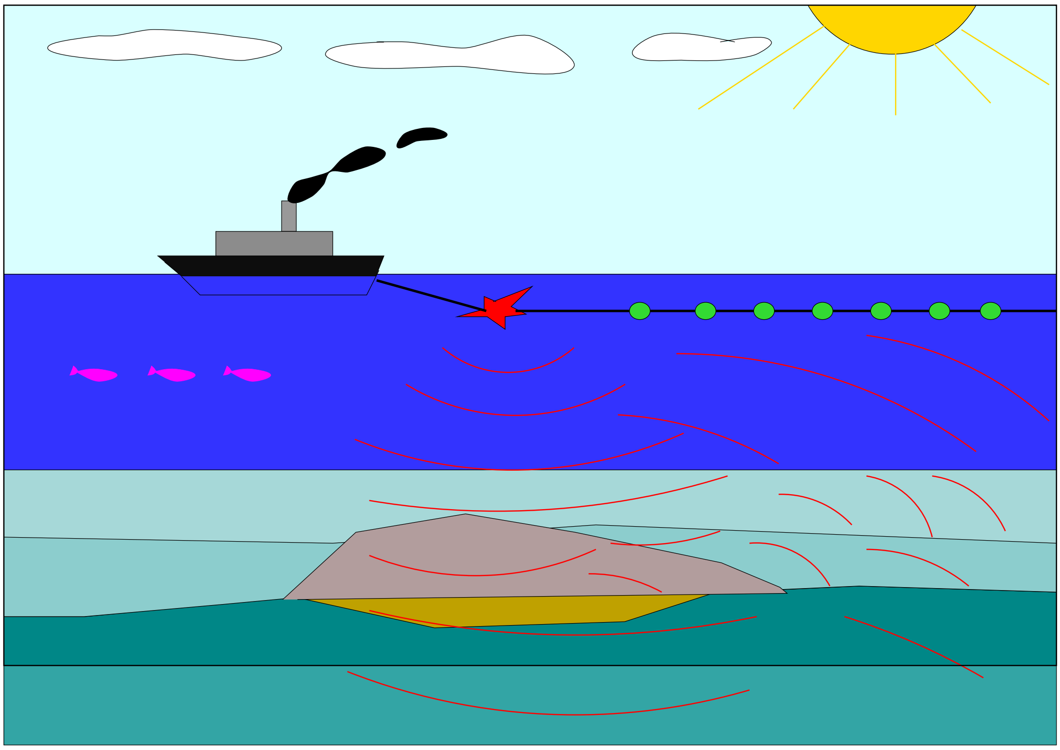
Lokalizacja

analiza danych





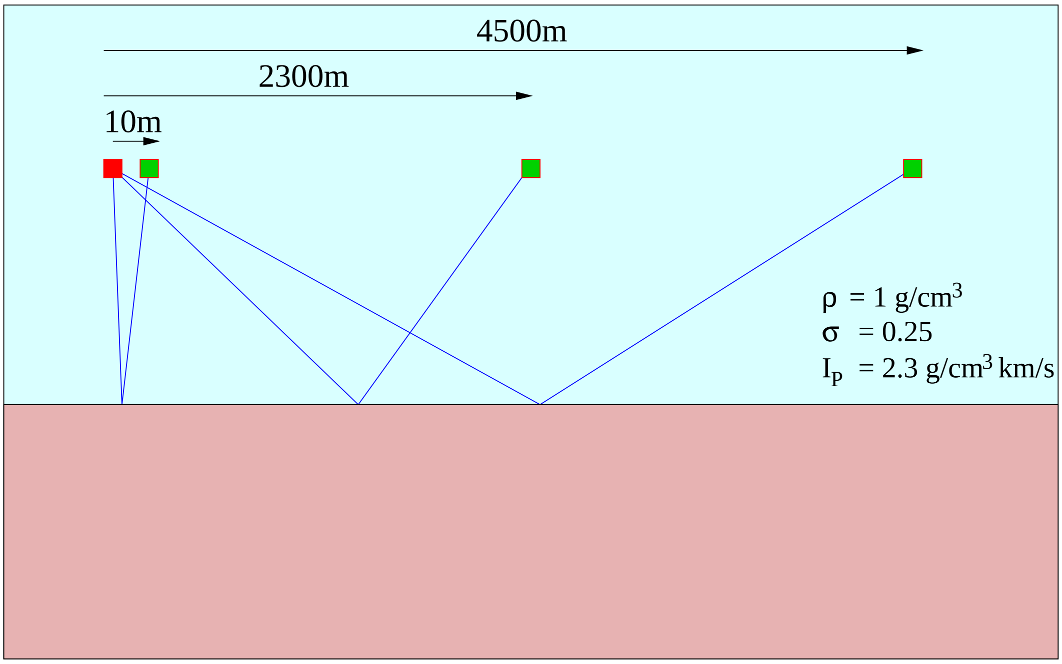
AVO

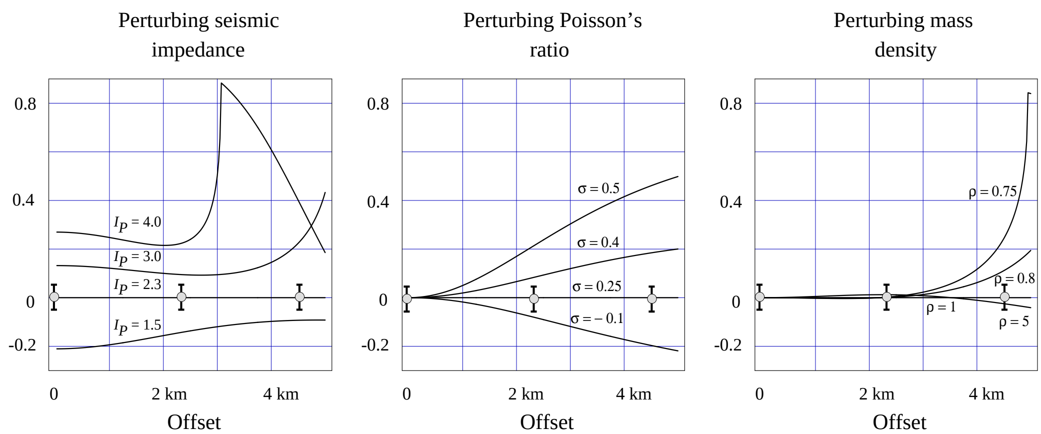


$$g(Ip, \sigma, \rho) \approx \exp\left(-||A^{th}(Ip, \sigma, \rho) - A^{o}||\right)$$

AVO

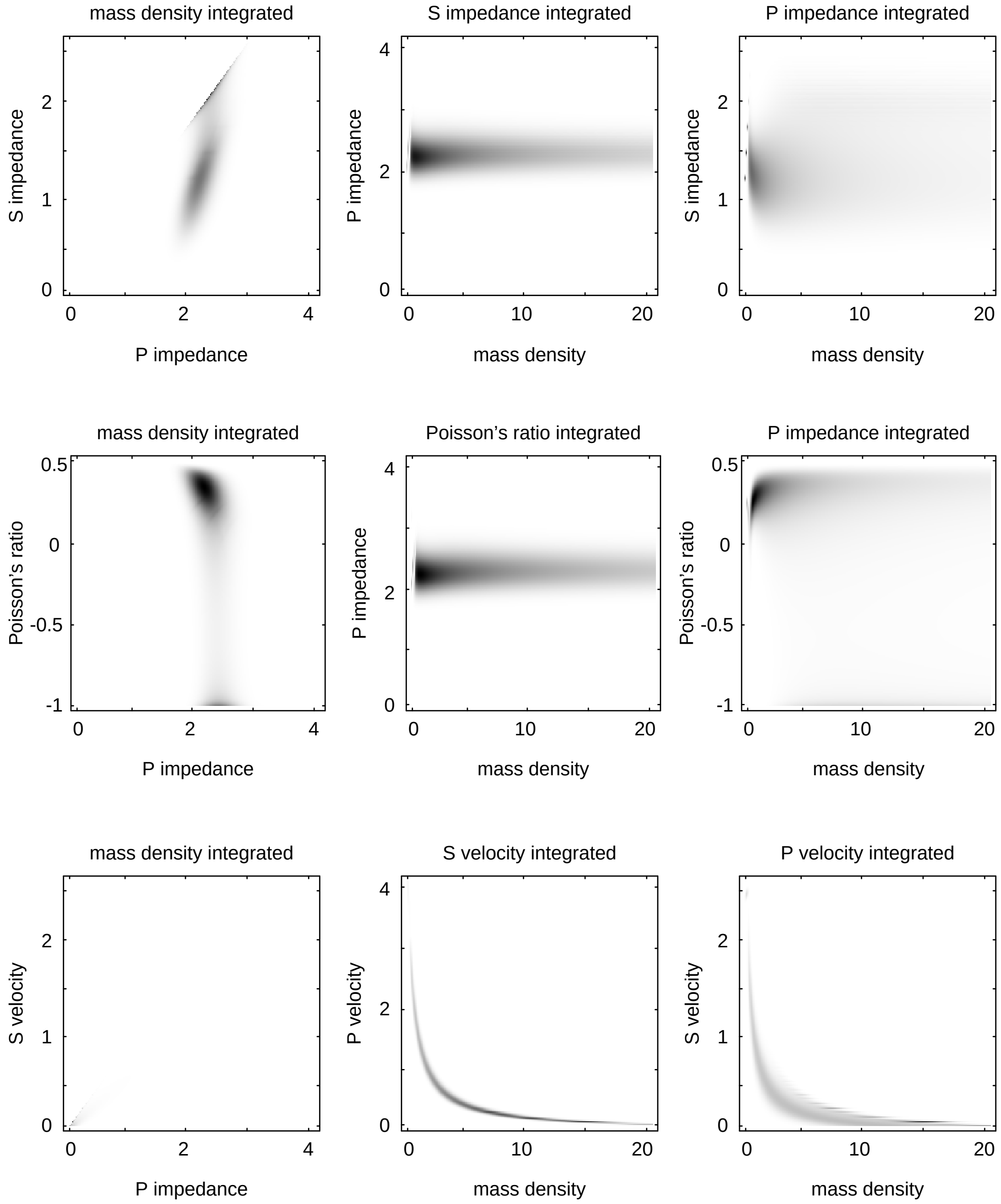
przykład numeryczny





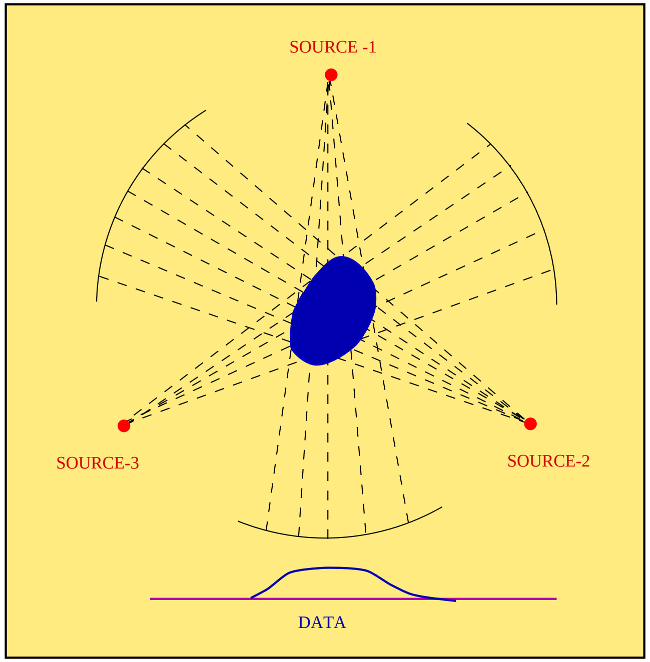
AVO

rozkłady *a posteriori*

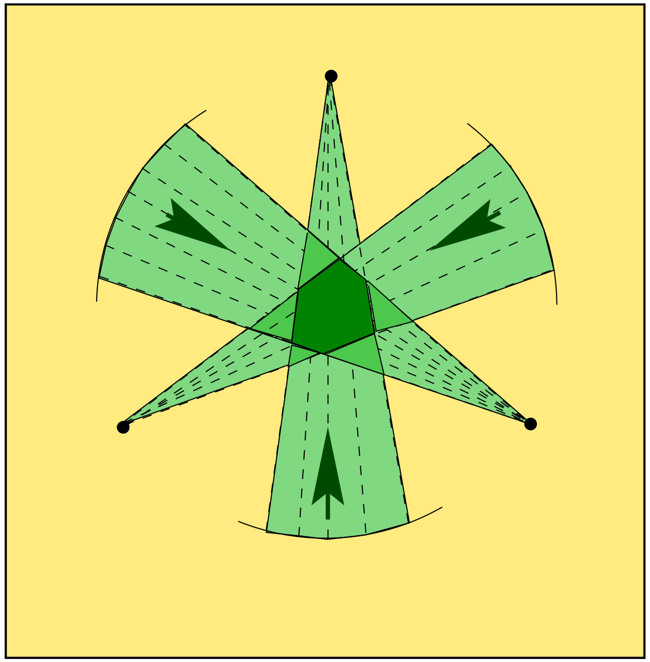


Tomografia

Projection



"BackProjection"



Tomografia

podejście bayesowskie

$$g(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) \exp\left(-\| \, t^{th}(\mathbf{v}) - t^{obs} \, \|\right)$$

$$t^{th} = \int_{ray} \frac{ds}{v(s)}$$

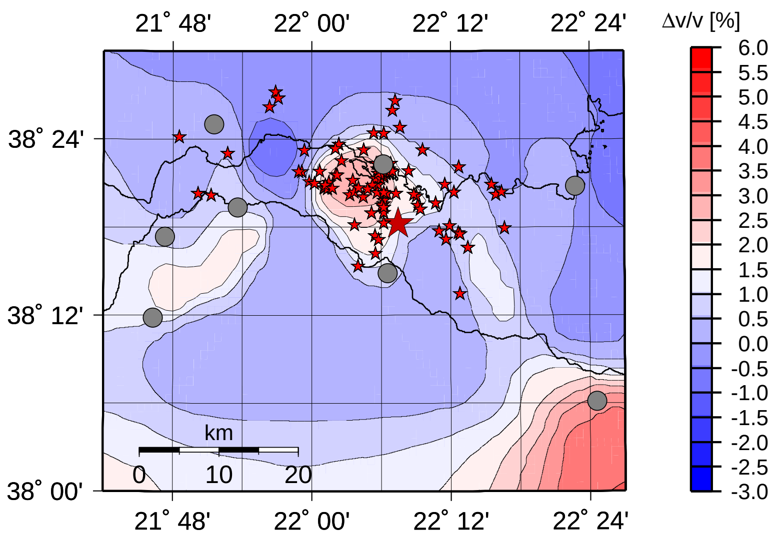
$$\mathbf{v}^{ml} : g(\mathbf{v}^{ml}) = \max$$

- Wybór normy
- Wybór metody optymalizacji
- Regularyzacja ...

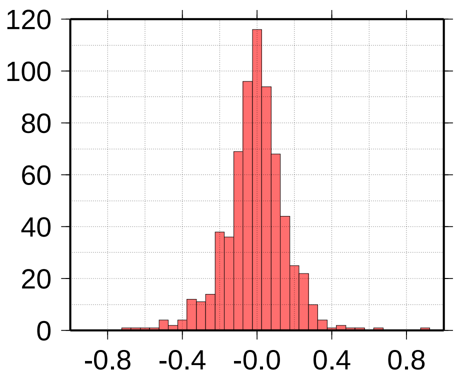
Tomografia

wybór metody optymalizacji

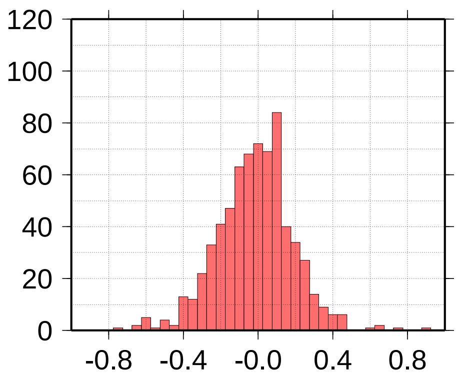
GA/LSQR



GA

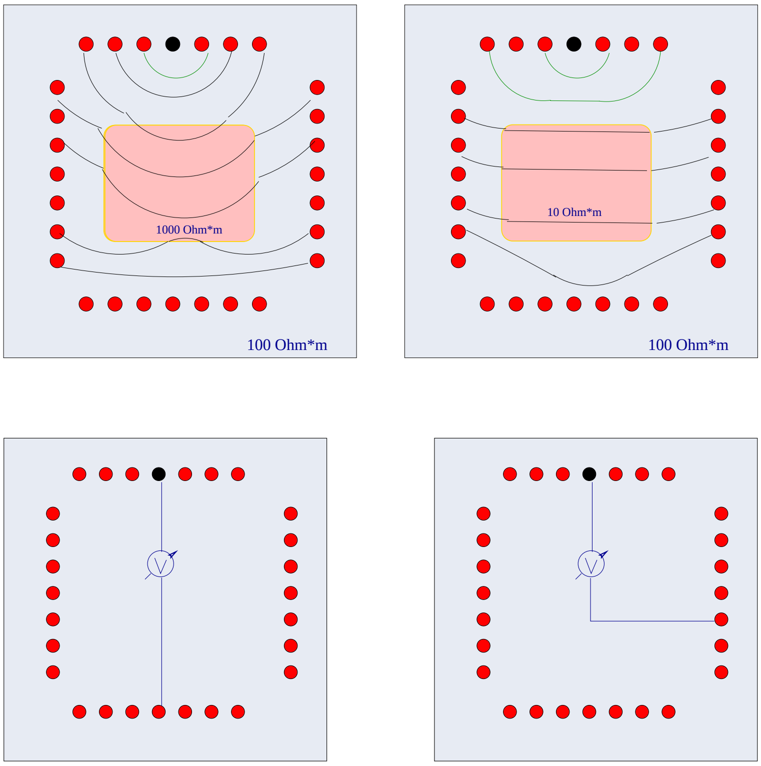


LSQR



Inwersja elektryczno-oporowa

Zasada



$$\mathbf{d} : \{V_1, V_2, \ldots V_N\}$$

$$\mathbf{m} : \{\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_M\}$$

$$\mathbf{d} = g(\mathbf{m})???$$

Inwersja elektryczno-oporowa

Modelowanie

$$\nabla \phi = -\mathbf{E}$$

$$\nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) = I\delta(\mathbf{x}_o)$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla \sigma \cdot \nabla \Phi + \sigma \nabla^2 \Phi = I\delta(\mathbf{x}_o)$$

Sformułowanie całkowe

$$V(\mathbf{x}) = V^p(\mathbf{x}) - \nabla \cdot \int_{x'} G(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\kappa(\mathbf{x}')\mathbf{E}(\mathbf{x}')d^3x'$$

$$\kappa = \frac{\sigma(\mathbf{x}) - \sigma_o}{\sigma_o}$$

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}$$

Inwersja Bayesowska a metody klasyczne

metody klasyczne

$$\mathbf{d} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{m} \qquad (+n)$$

$$G^T\mathbf{d} = \mathbf{G}^T\mathbf{G}\mathbf{m}$$

$$\mathbf{G}^T\mathbf{G} \to \mathbf{G}^T\mathbf{G} + \lambda\mathbf{I}$$

$$\mathbf{m} = (\mathbf{G}^T\mathbf{G} + \lambda\mathbf{I})^{-1}G^T\mathbf{d}$$

problemy

- problem nieliniowy $\mathbf{d} = \mathbf{g}(\mathbf{m})$???
- nieznana (niegausowska) charakterystyka błędów
- wiarygodność oszacowanie błędów
- czy znaleziony jest najlepszy model ???
- sensowna regularyzacja i ujednoznacznienie