



Współczesna technika inwersyjna - dokąd zmierzamy ?

Wojciech Dębski

24.05.2011

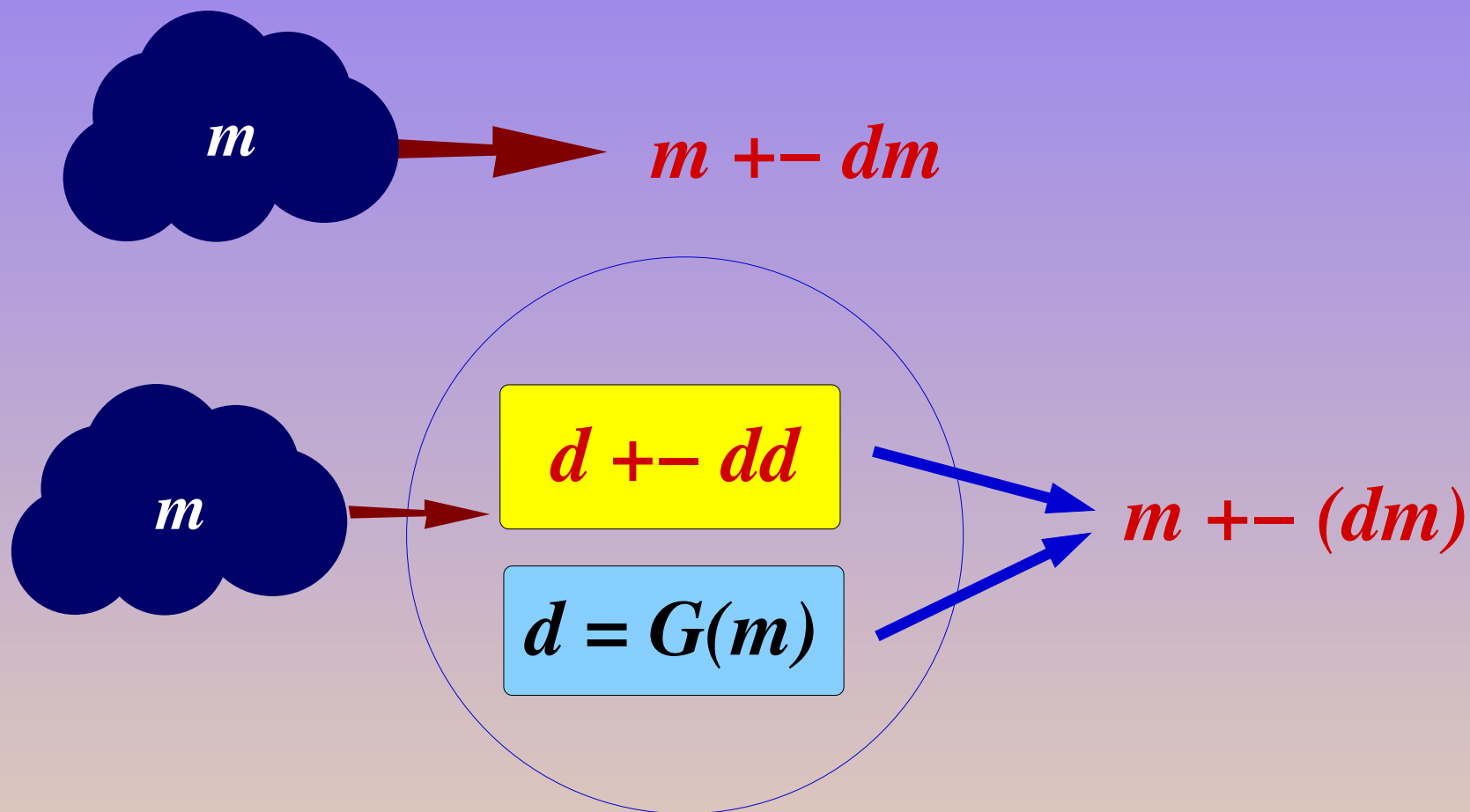
Pomiar bezpośredni



Pomiar pośredni



Interpretacja matematyczna



Algorytmy inwersyjne

Metoda	Zalety	Ograniczenia
Algebraiczna $\mathbf{m}^{ml} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \gamma \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{d}$	- Prostota - Duże zadania	- Tylko problemy liniowe - Wrażliwa na błędy
Optymalizacyjna $\ \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}^{ml} - \mathbf{d}\ = \min$	- Prostota - Nieliniowa	- Brak oszacowania dokładności
Probabilistyczna $\sigma(\mathbf{m}) = f(\mathbf{m}) L(\mathbf{m}; \mathbf{d})$	- Nieliniowa - Pełna analiza błędów	- Złożona teoria - wymagane efektywne próbkowanie

Algebra i macierze

$$\mathbf{d} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}$$

$$d^i = \sum_j G^{ij} m_j$$

$$\mathbf{m}^{ml} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \mathbf{C}_G \mathbf{C}_M^{-1})^{-1} \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{d}$$

$$\mathbf{C}_{ap} = (\mathbf{G}^T \mathbf{C}_G^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{C}_M^{-1})^{-1}$$

Klasyczna technika optymalizacyjna

Przeszukiwanie przestrzeni modeli w celu znalezienia optymalnego modelu $\mathbf{m}$:

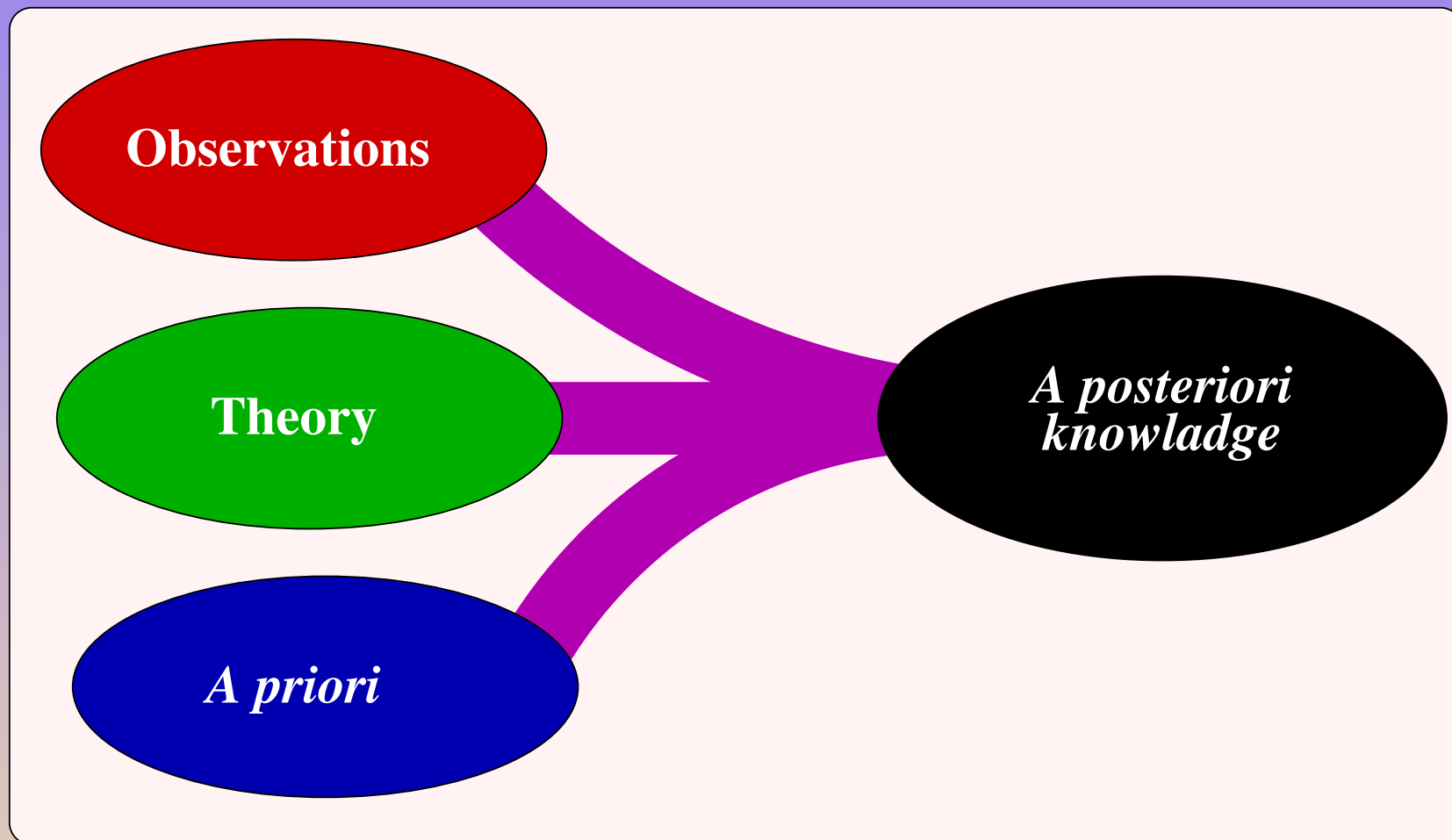
$$\|\mathbf{G} \cdot \mathbf{m}^{ml} - \mathbf{d}\| = \min$$

Normy:

$$l_2: \quad \|\mathbf{r}\| = \frac{1}{N} \sum_i r_i^2$$

$$l_1: \quad \|\mathbf{r}\| = \frac{1}{N} \sum_i |r_i|$$

Inwersja probabilistyczna - idea



Inwersja probabilistyczna - rozkład *a posteriori*

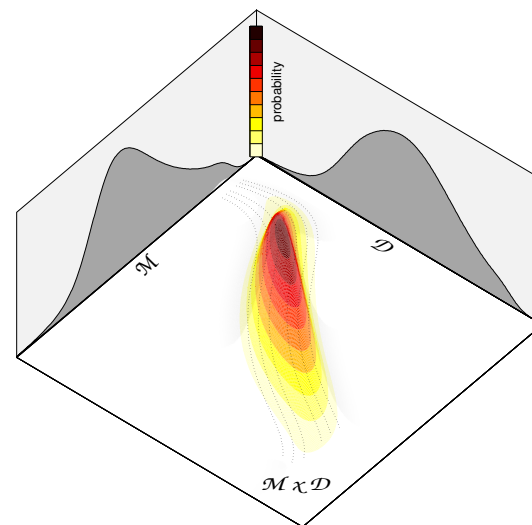
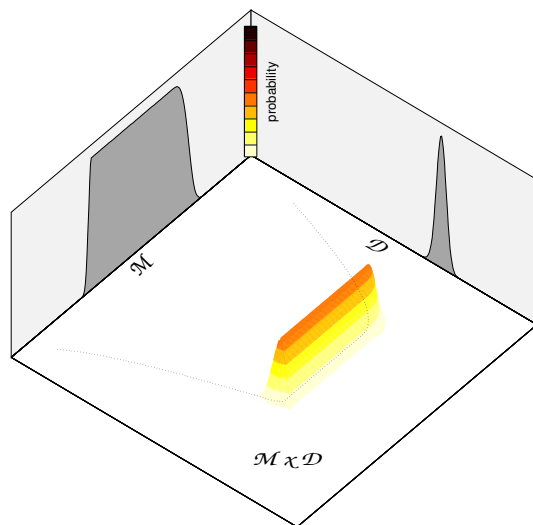
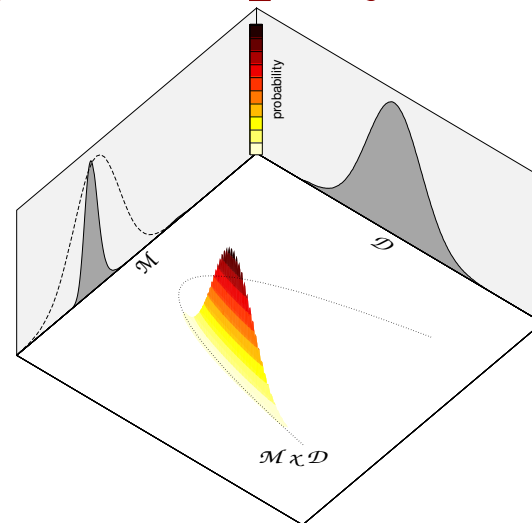
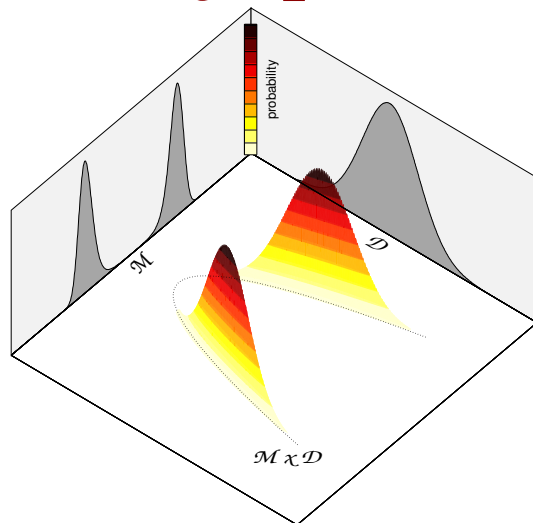
Rozkład prawdopodobieństwa *a posteriori*

$$\sigma(\mathbf{m}) = f(\mathbf{m})L(\mathbf{m})$$

Funkcja “Likelihood”

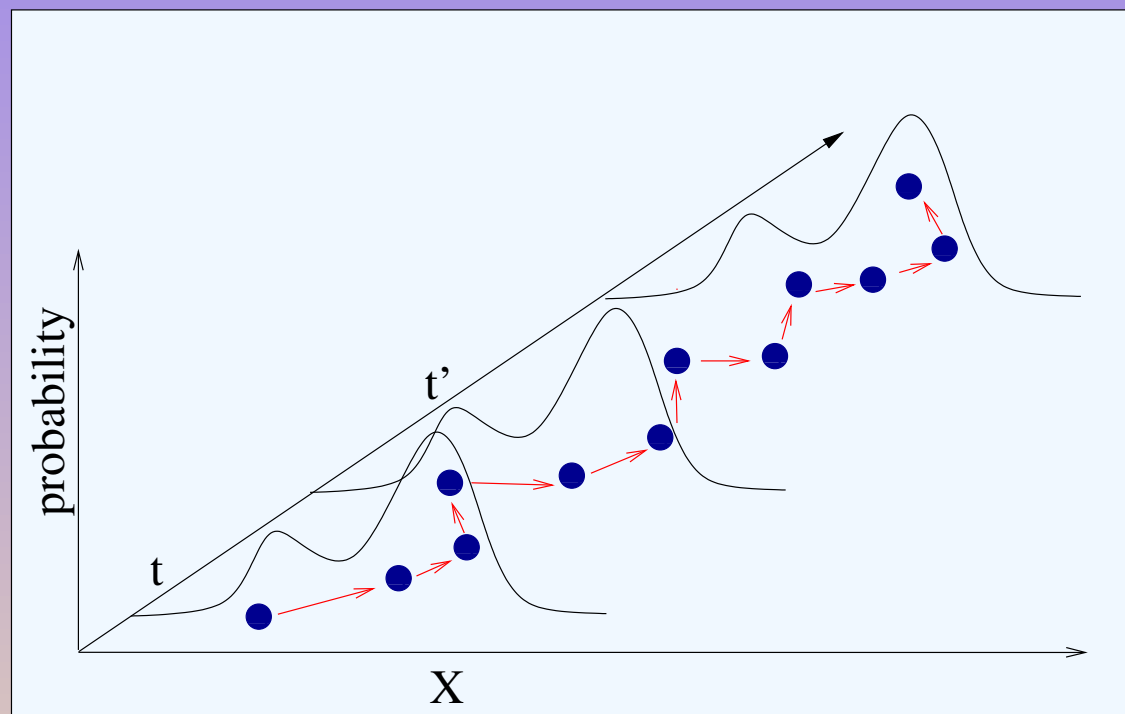
$$L(\mathbf{m}) = \exp(-\|\mathbf{d} - \mathbf{G}(\mathbf{m})\|)$$

Inwersja probabilistyczna - przykłady



Inwersja probabilistyczna - próbkowanie

Technika *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC)



Inwersja probabilistyczna - próbkowanie

$$\int_M H(\mathbf{m}) \sigma(\mathbf{m}) d\mathbf{m} \approx \frac{1}{N} \sum_{\alpha} H(\mathbf{m}^{\alpha})$$

Np. macierz kowariancji *a posteriori*

$$H(\mathbf{m}) = (\mathbf{m} - \mathbf{m}^{avr})^2$$

Kilka konkurencyjnych teorii

Dotychczas rozważane zagadnienia odwrotne miały jedną wspólną cechę. Zawsze rozważaliśmy tylko jeden model teoretyczny (teorię) $G(m)$. Rodzą się oczywiste pytania: jak postępować gdy mamy kilka konkurencyjnych modeli jak je porównać w oparciu o dostępne informacje, i jak ocenić ich skuteczność (dokładność), itp.

Occam's razor

Klasyczne rozwiązanie polega na przyjęciu heurystycznej zasady, według której mając do czynienia z dwoma *podobnymi* modelami preferowany jest model prostszy. Ten paradygmat filozoficzny został sformułowany w XIV w. przez filozofa i teologa Williama Ockhama jako zasada *entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem*

Occam's razor a inwersja

Czy jednakże zasada ta jest akceptowalna z punktu widzenia teorii inwersji, a więc gdy porównania modeli dokonujemy w oparciu o skończony ustalony zasób informacji? Model bardziej skomplikowany z większą ilością parametrów na ogół będzie dawał lepsze dopasowanie do danych obserwacyjnych - będzie “lepszy”. Równocześnie jednak większa liczba parametrów złożonego modelu będzie gorzej wyznaczana z posiadanych danych pomiarowych.

Podójście klasyczne

$$G(\mathbf{m}) \rightarrow G_{\alpha}(\alpha, \mathbf{m})$$

$$G_1(m) = \alpha_1 m$$

Np. $G_2(m) = \alpha_1 m + \alpha_2 m^2$

$$G_3(m) = \alpha_1 \sin(m) + \frac{\sin(m)}{\alpha_2 m^2 + J_{\alpha_3}(m)}$$

Podjęcie klasyczne

$$R(\mathbf{m} | \alpha) = \|G_{\alpha}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}^{obs}\|$$

Dwa kroki:

$$\mathbf{m}^{ml} : r(\alpha) = R(\mathbf{m}^{ml} | \alpha) = \min$$

Następnie:

$$\alpha^{opt} : r(\alpha) = \min$$

Czyli

Wybieramy model (teorię) która najlepiej odtwarza pomiary

Optymalny model

1. Metoda prób i błędów
2. Systematyczne przeszukiwanie
3. Optymalizacja (np. stochastyczna)
4. Symulacja Monte Carlo

Tylko na ogół przestrzeń modeli $G_{\alpha}(\mathbf{m})$ jest nieskończenie wielowymiarowa !

Podejście Bayesowski - *evidence*

$$\sigma(\mathbf{m}) = f(\mathbf{m}) \exp(-\|\mathbf{d} - \mathbf{G}(\mathbf{m})\|)$$

Warunek normalizacji

$$Z[G, \mathbf{d}^{obs}] = \int_{\mathcal{M}} \sigma(\mathbf{m}) d\mathbf{m}$$

$$\sigma(\mathbf{m}) = \frac{1}{Z[G]} f(\mathbf{m}) \exp(-\|\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{G}(\mathbf{m})\|)$$

Szukamy modelu maksymalizującego $Z[G]$

Transdimensional MCMC

Dwie drogi:

1. użycie techniki MCMC do wyznaczenia $Z[G]$ dla każdego modelu G
2. symultaniczne próbkowanie przestrzeni $\mathcal{M} \times \mathcal{G}$
np. algorytmem **Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo**

Podsumowanie - perspektywy

Przyszłość, a w rzeczywistości już teraźniejszość prac rozwojowych w zakresie teorii inwersji w zagadnieniach geofizycznych:

- ◆ wybór i ocena konkurencyjnych modeli
- ◆ ocena ilości informacji pomiarowych pod kątem możliwości weryfikacji różnych modeli i wyznaczenia ich parametrów (pomiar pośrednie)

Podsumowanie - pragmatyzm

- ◆ jeśli można należy używać techniki probabilistycznej
- ◆ jeśli nie można to tylko technik optymalizacji stochastycznej
- ◆ o metodach optymalizacji gradientowej najlepiej zapomnieć

Podsumowanie - zachęta

- ◆ obecnie selekcja modeli ciągle musi być robiona metodą prób i błędów, ale już wkrótce pewnie nie. Warto się do tego przygotować.
- ◆ nowe techniki próbkowania MC (RJMCMC) są bardzo obiecujące dla niestandardowych zastosowań teorii inwersji
- ◆ błędy, błędy, błędy ...



KONIEC