Technika Monte Carlo - nowy trend w rozwiązywaniu zagadnień odwrotnych

Wojciech Dębski

28.05.2004

Zagadnienia odwrotne - uogólnione pomiary

$$\mathbf{m} = ? \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{d}^{obs} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{d}^{obs} \Rightarrow \mathbf{m}$$

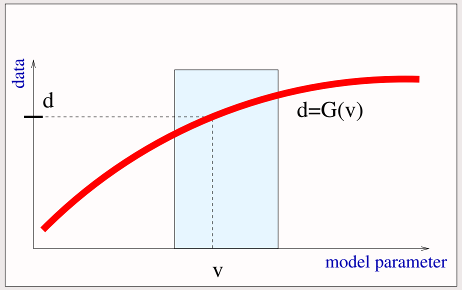
$$||\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{d}^{th}(\mathbf{m})|| + \lambda||\mathbf{m}^{ml} - \mathbf{m}^{apr}|| = \min$$

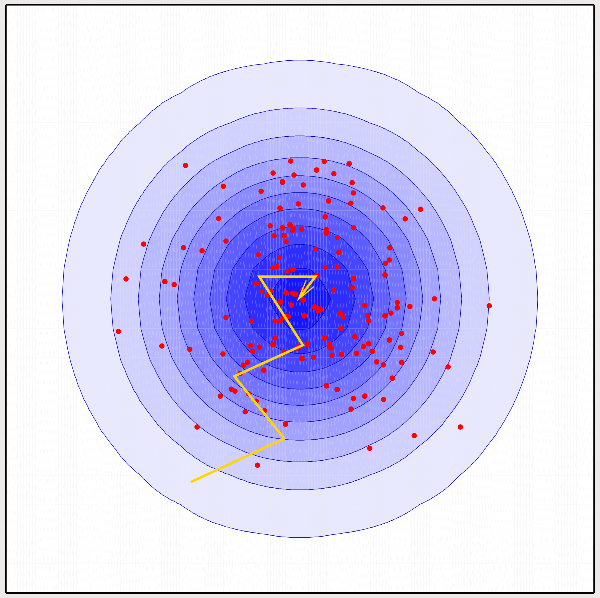
$$\mathbf{m}^{true} = \mathbf{m}^{ml} + \epsilon_{\mathbf{m}} \qquad \epsilon_{\mathbf{m}} = ???$$

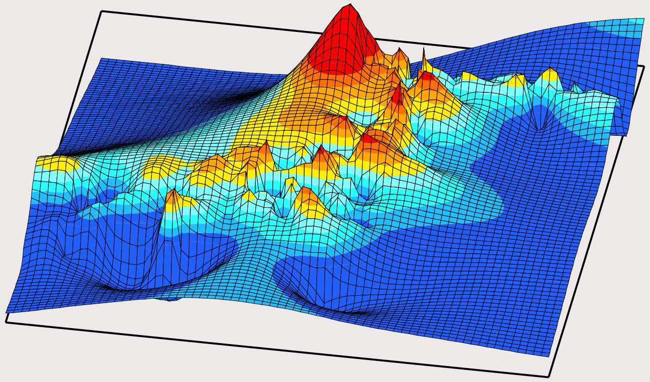
Stosowane Algorytmy

Metoda	Zalety	Ograniczenia
Algebraiczna (LSQR)	- Prostota	- tylko problemy liniowe
$\mathbf{m}^{ml} = (\mathbf{G}^T\mathbf{G} + \gamma\mathbf{I})^{-1}\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{d}^{obs}$	- wielkoskalowe	- czułe na błędy
Optymalizacyjna	- Prostota	- brak oszacowania błędów
$S(\mathbf{m}) = \|\mathbf{d}^{th}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}^{obs}\| + \gamma\|\mathbf{m} - \mathbf{m}^{apr}\|$	- nieliniowa	
Probabilistyczna	- nieliniowa	- złożona teoria
$\sigma(\mathbf{m}) = f(\mathbf{m})L(\mathbf{m}, \mathbf{d}^{obs})$	- pełna analiza błędów	- Efektywne próbkowanie

Porównanie algorytmów







Algebraiczny
(Odwrotna projekcja)

Optymalizacyjny

Bayesowski

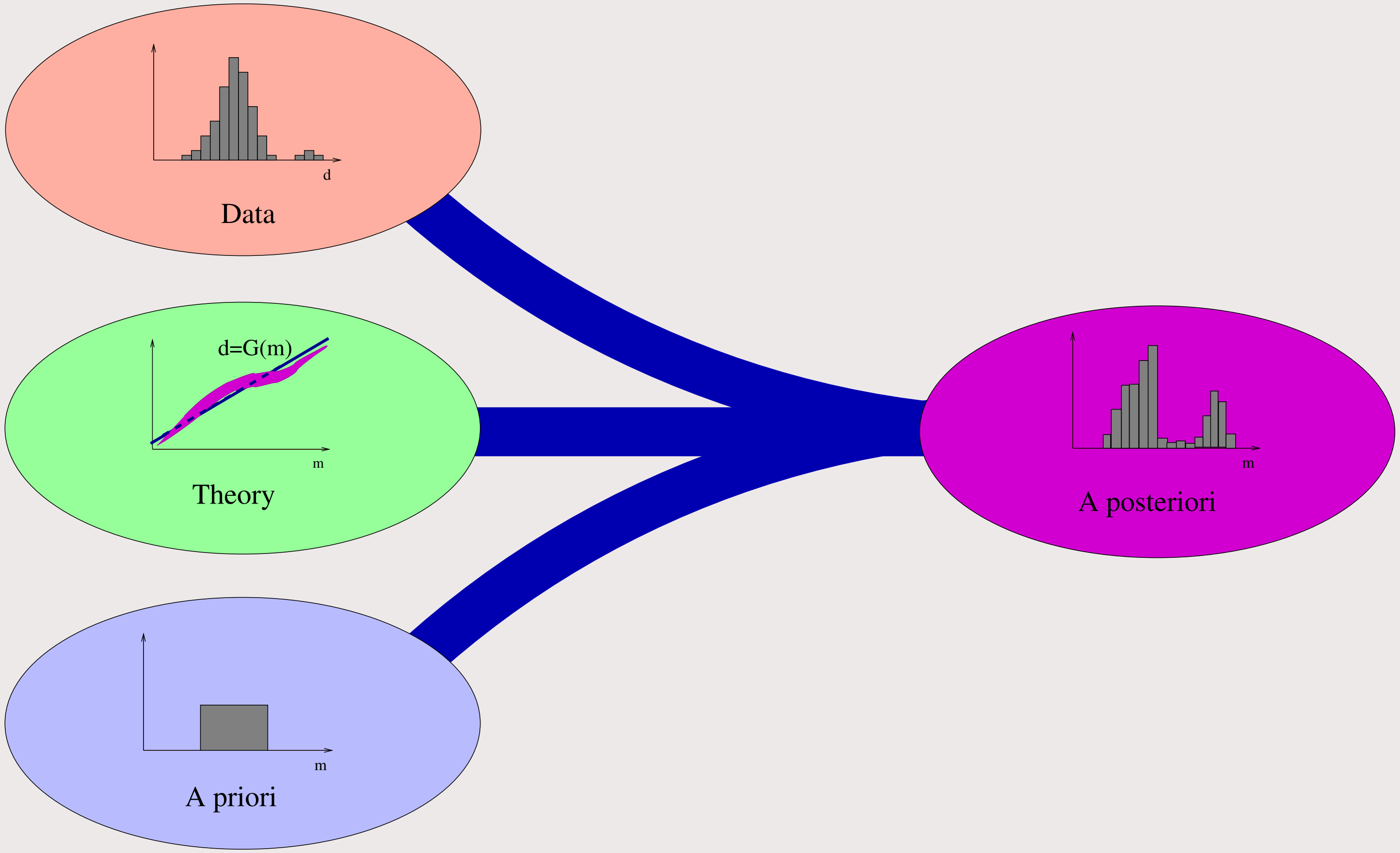
(Przeszukiwanie przestrzeni)

A posteriori pdf

$$\sigma_m(\mathbf{m}) = f_M(\mathbf{m}) \cdot L(\mathbf{m}, \mathbf{d}^{obs})$$

$$L(\mathbf{m}, \mathbf{d}^{obs}) = e^{-||\mathbf{d}^{obs} - G(\mathbf{m})||}$$

Inwersja Probabilistyczna (Bayesowska)



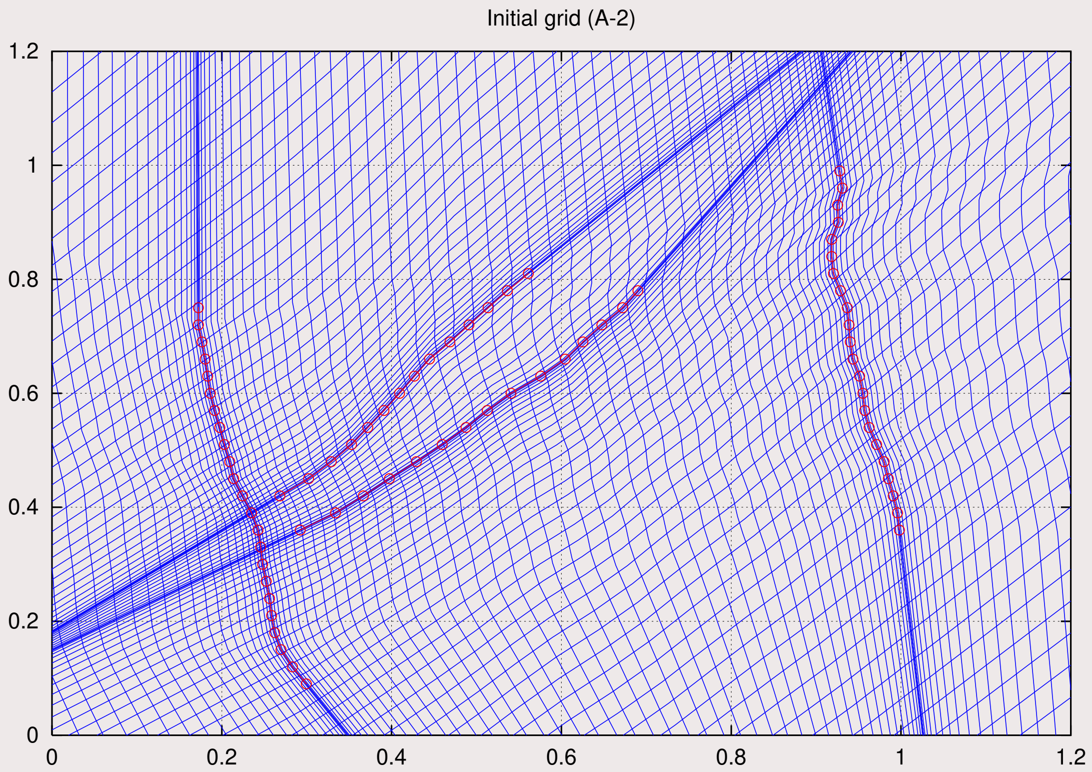
Badanie $\sigma(\mathbf{m})$

- Poszukiwanie Globalnego Maximum
- Próbkowanie deterministyczne $\sigma(\mathbf{m})$
- Próbkowanie Monte Carlo (MCMC)

$$\{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \cdots\cdots\cdots \mathbf{m}_N\}$$

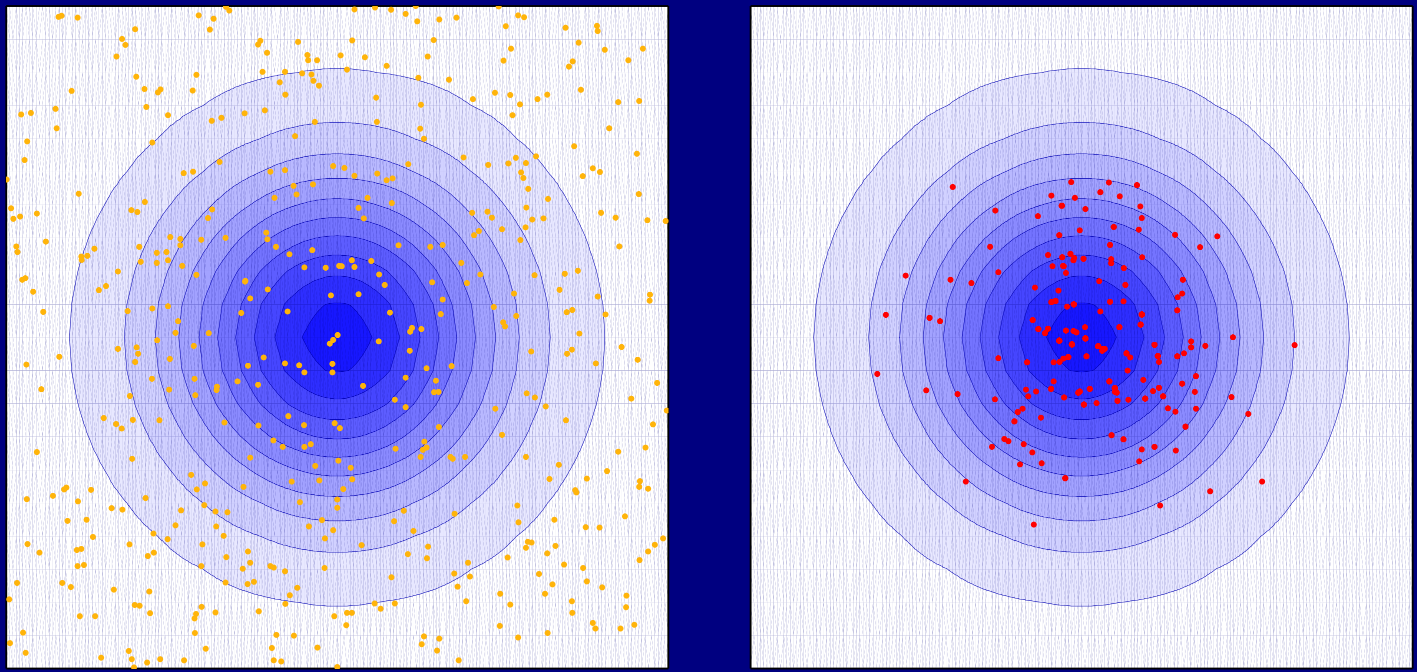
$$N_{[\mathbf{m}-\Delta,\mathbf{m}+\Delta]} \sim \sigma(\mathbf{m})$$

Próbkowanie deterministyczne (geometryczne)



- Błędy próbkowania: $\sim \frac{1}{\sqrt[D]{N}}$

Próbkowanie Monte Carlo



Próbkowanie przypadkowe

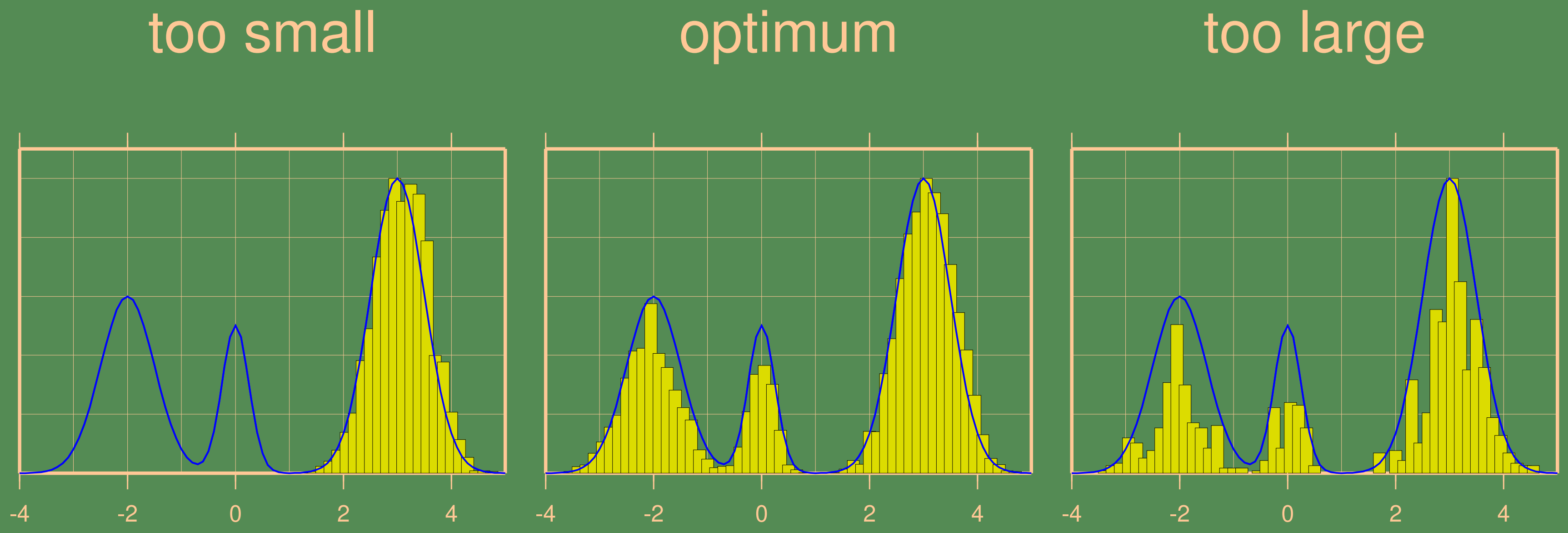
Próbkowanie ważone

Algorytm Metropolisa-Hastinga

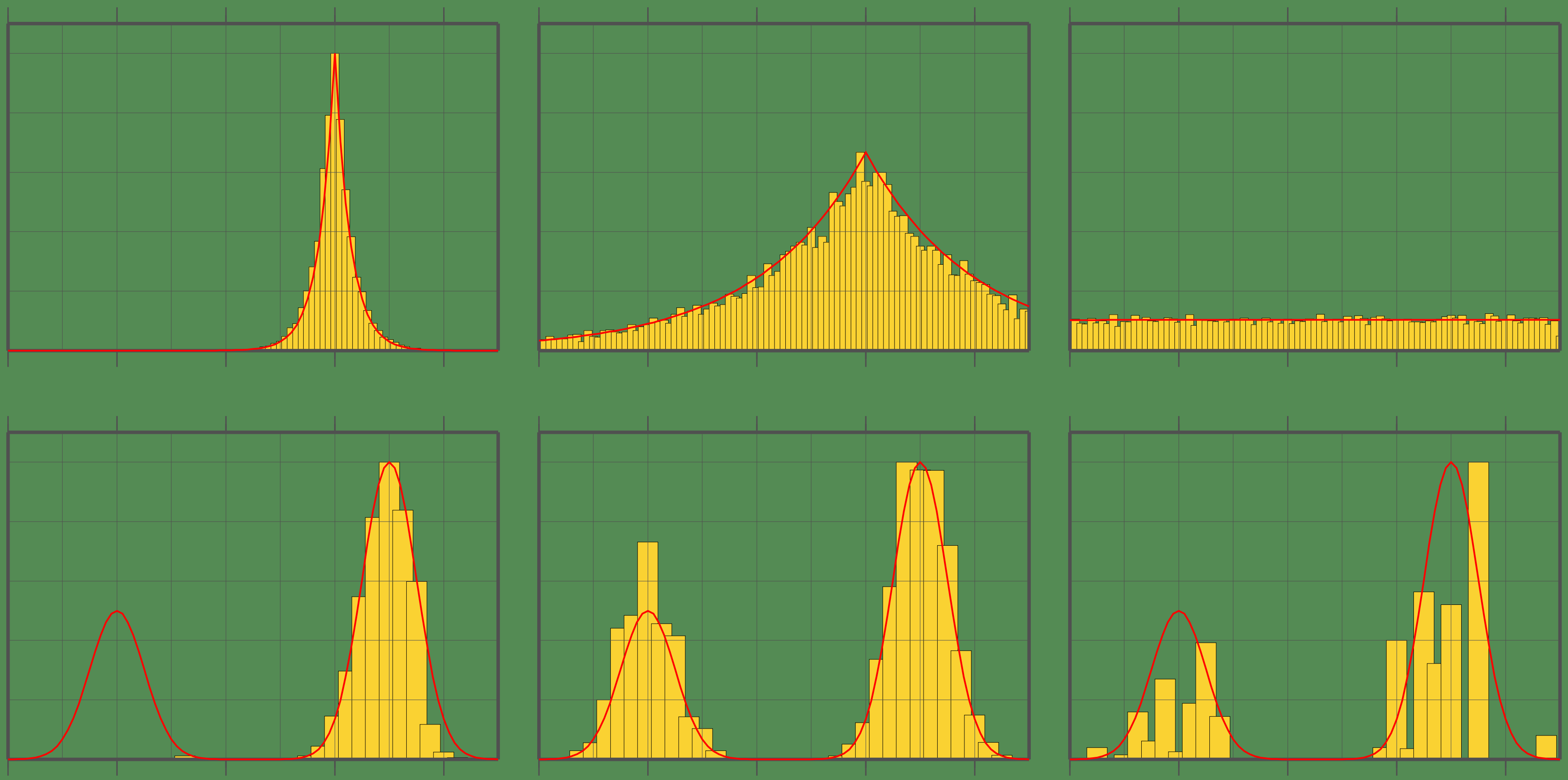
$$
\begin{aligned}
x_i &= x_{i-1} + \delta x_i \\
K(x_i; x_{i-1}) &= \min\left\{1, \frac{p(x_i)}{p(x_{i-1})}\right\}
\end{aligned}
$$

Algorytm MH - ograniczenia

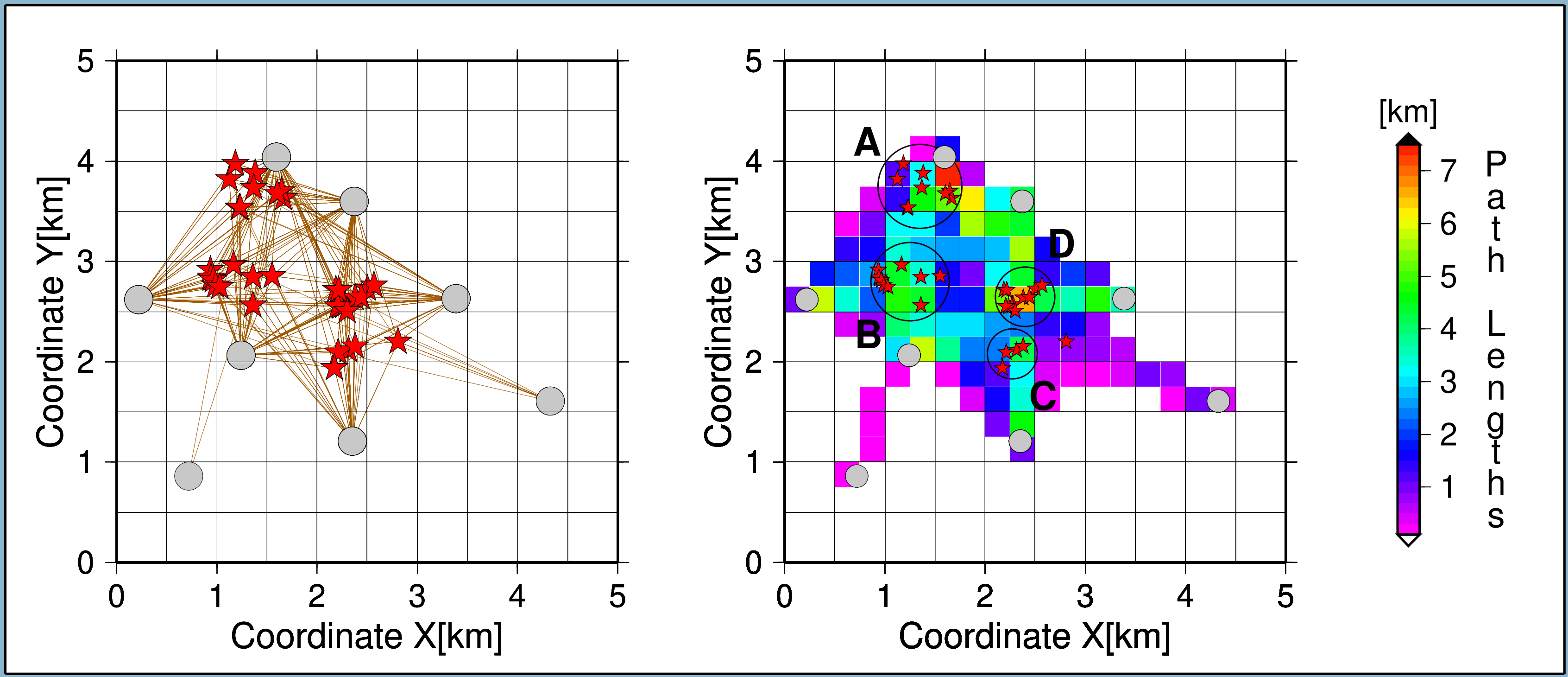
$$x_{i+1} = x_i + \delta x$$



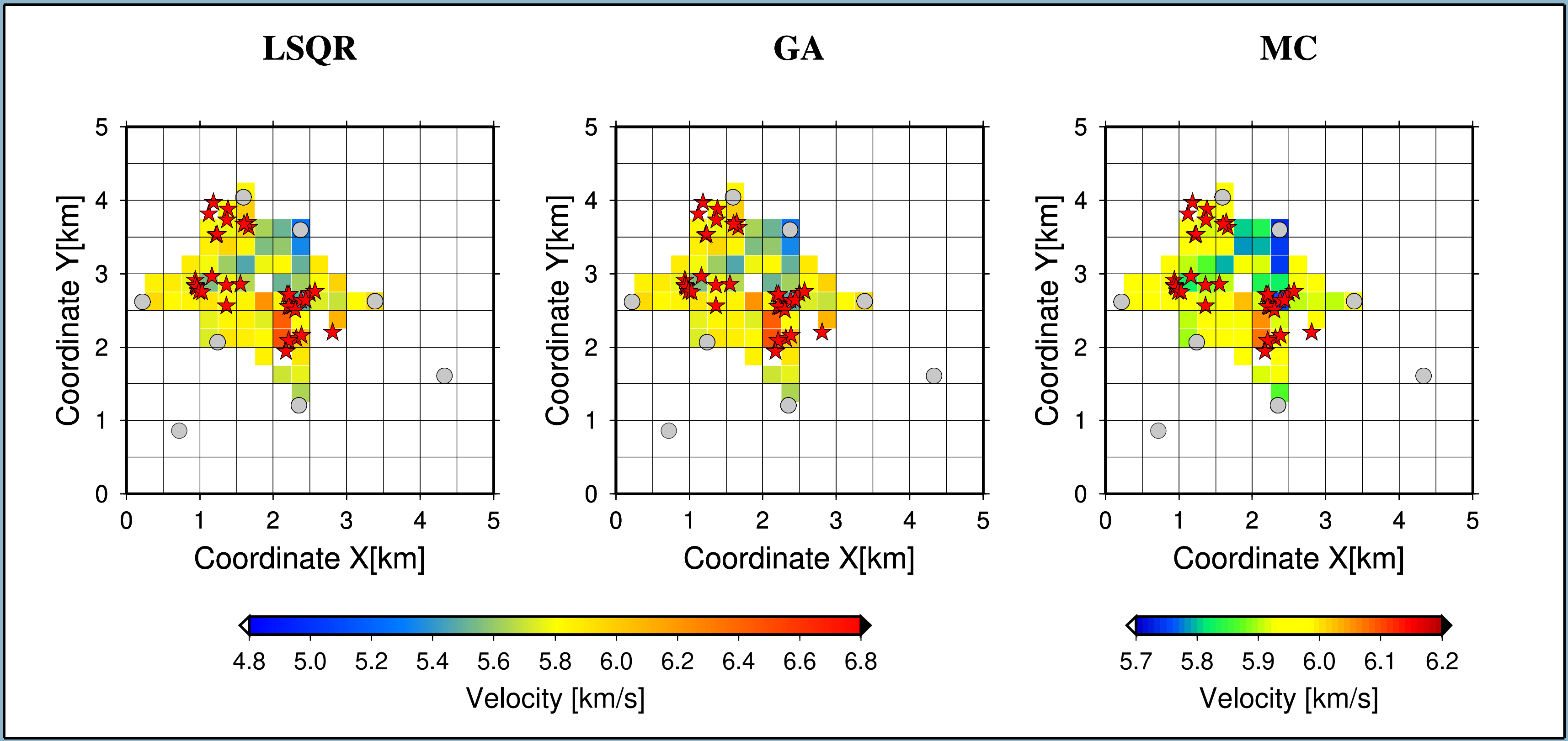
Algorytm MH - ograniczenia



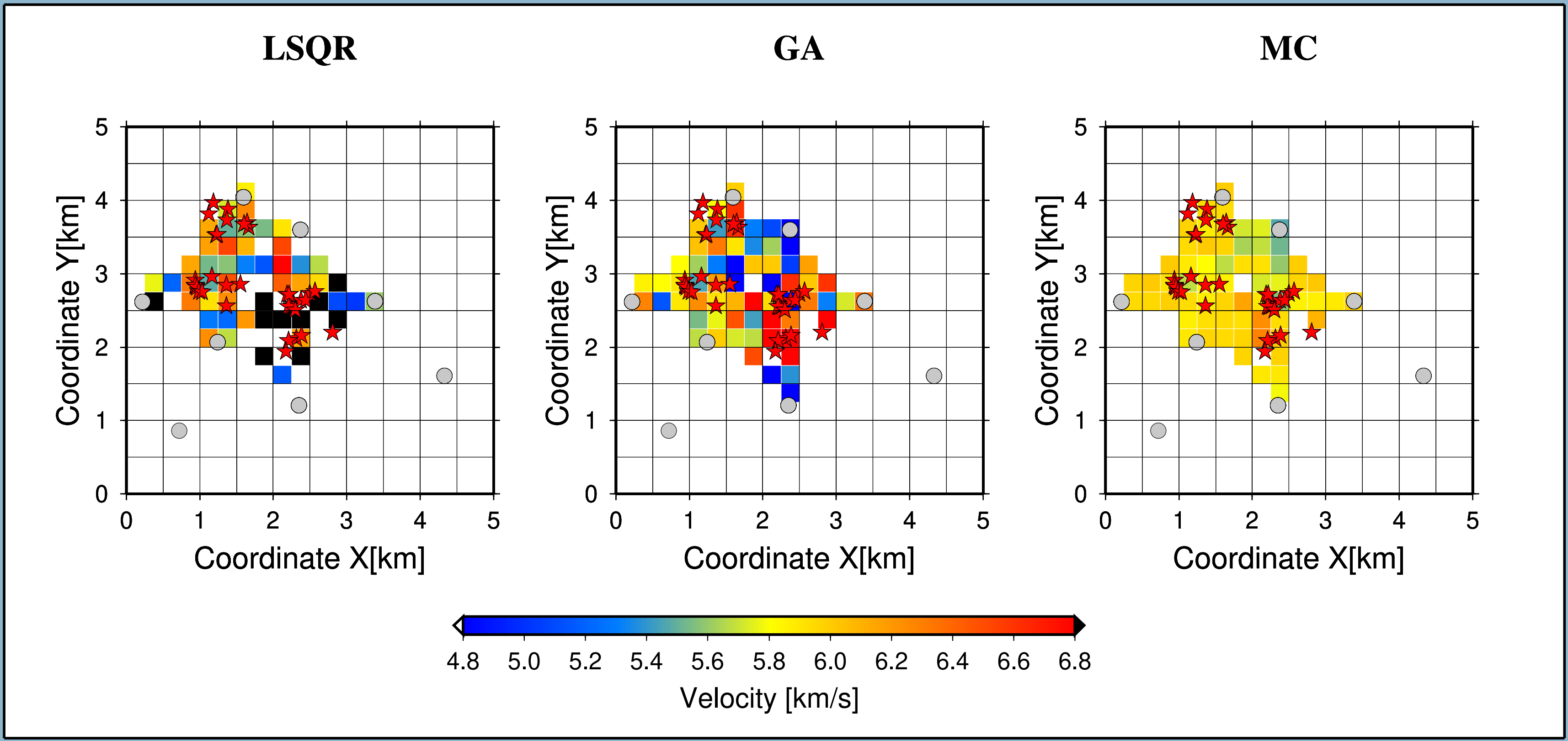
Kopalnia miedzi “Rudna”



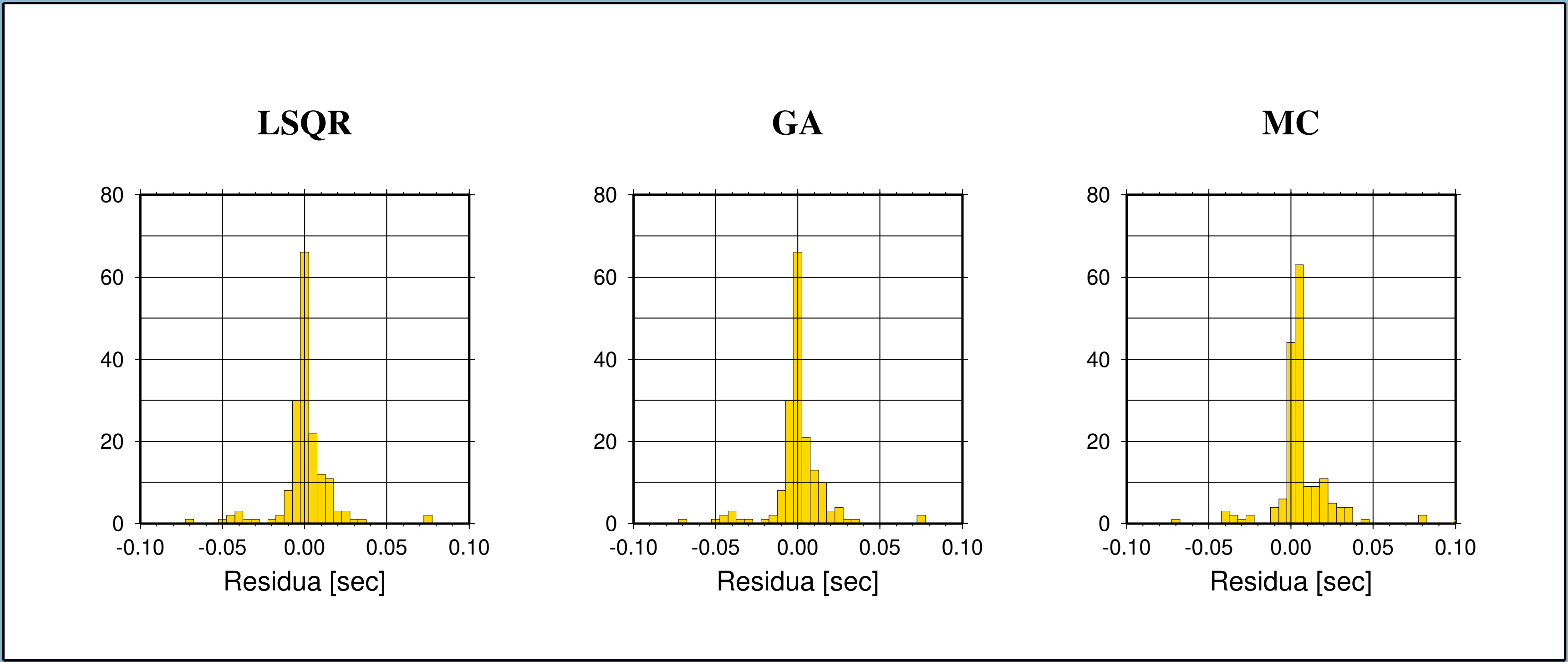
Tomogramy - optymalne tłumienie



Tomogramy - brak tłumienia

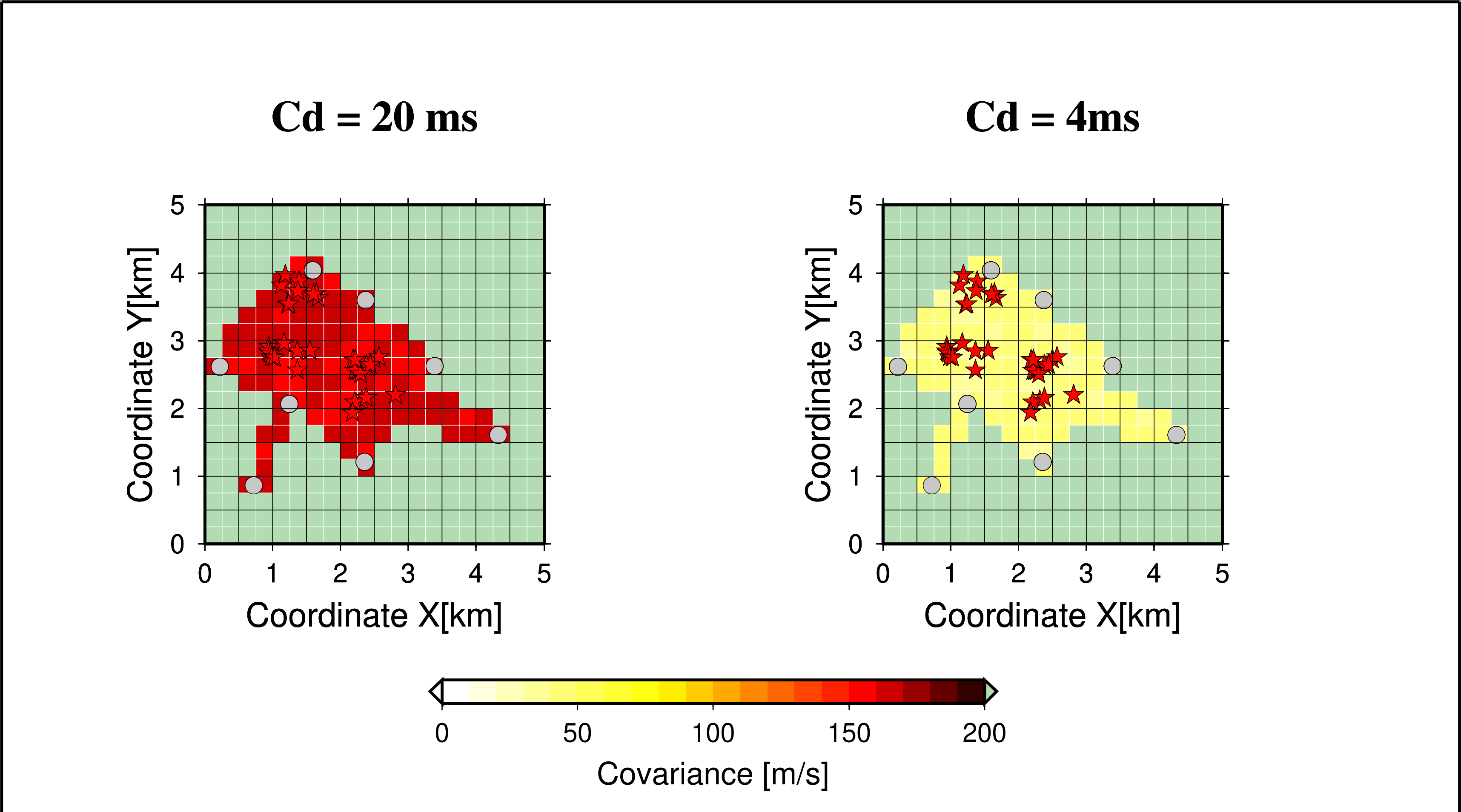


Residua



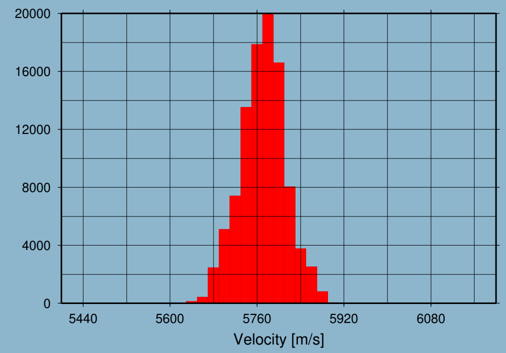
LSQR
GA
MC
80
60
40
20
0
-0.10
-0.05
0.00
0.05
0.10
Residua [sec]
Residua [sec]
Residua [sec]

Rozkład przestrzenny błędów

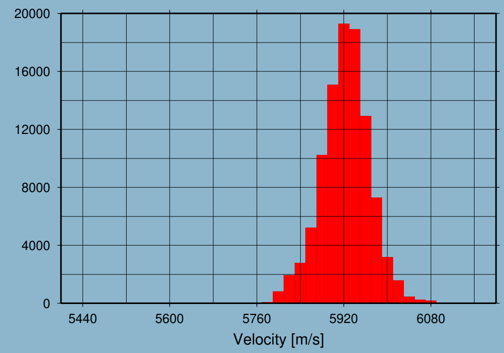


Wybrane 1D rozkłady PDF

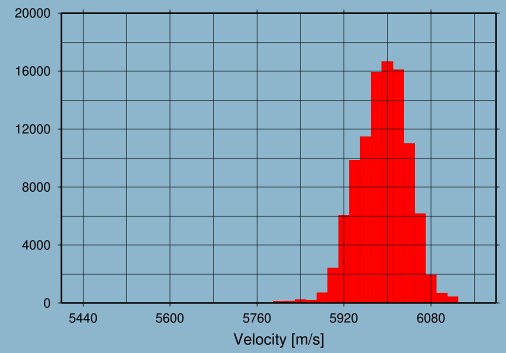
Cd=0.004 Cm=400 Cs=267



Cd=0.004 Cm=400 Cs=226



Cd=0.004 Cm=400 Cs=169



Cd=0.004 Cm=400 Cs=201