

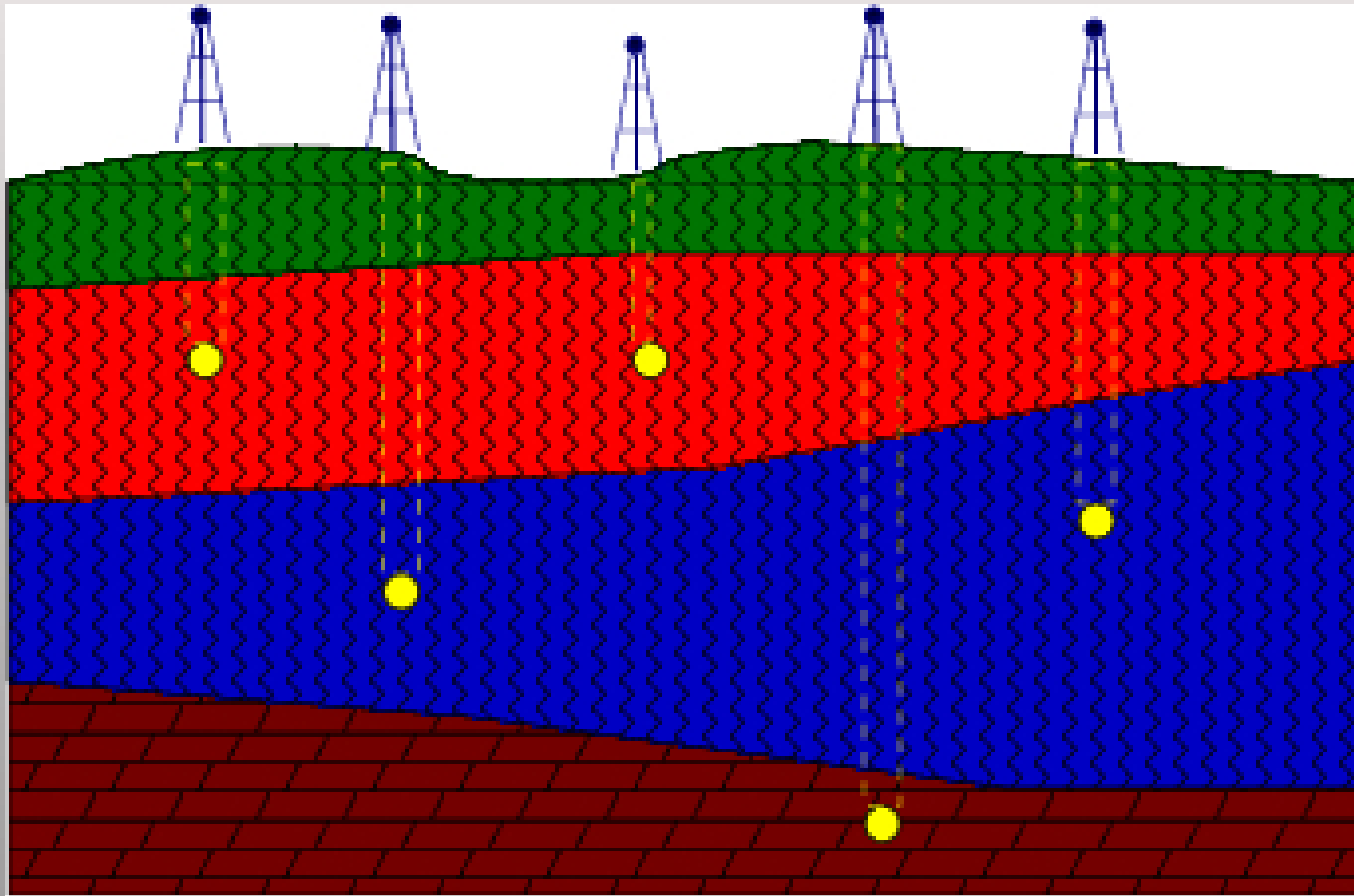
A black and white photograph of two high-speed trains, likely Shinkansen, on a railway track. The train in the foreground is on the left, and the one behind it is on the right. The background shows some industrial structures and a building.

Zastosowanie techniki Monte Carlo do rozwiązywania zagadnień odwrotnych

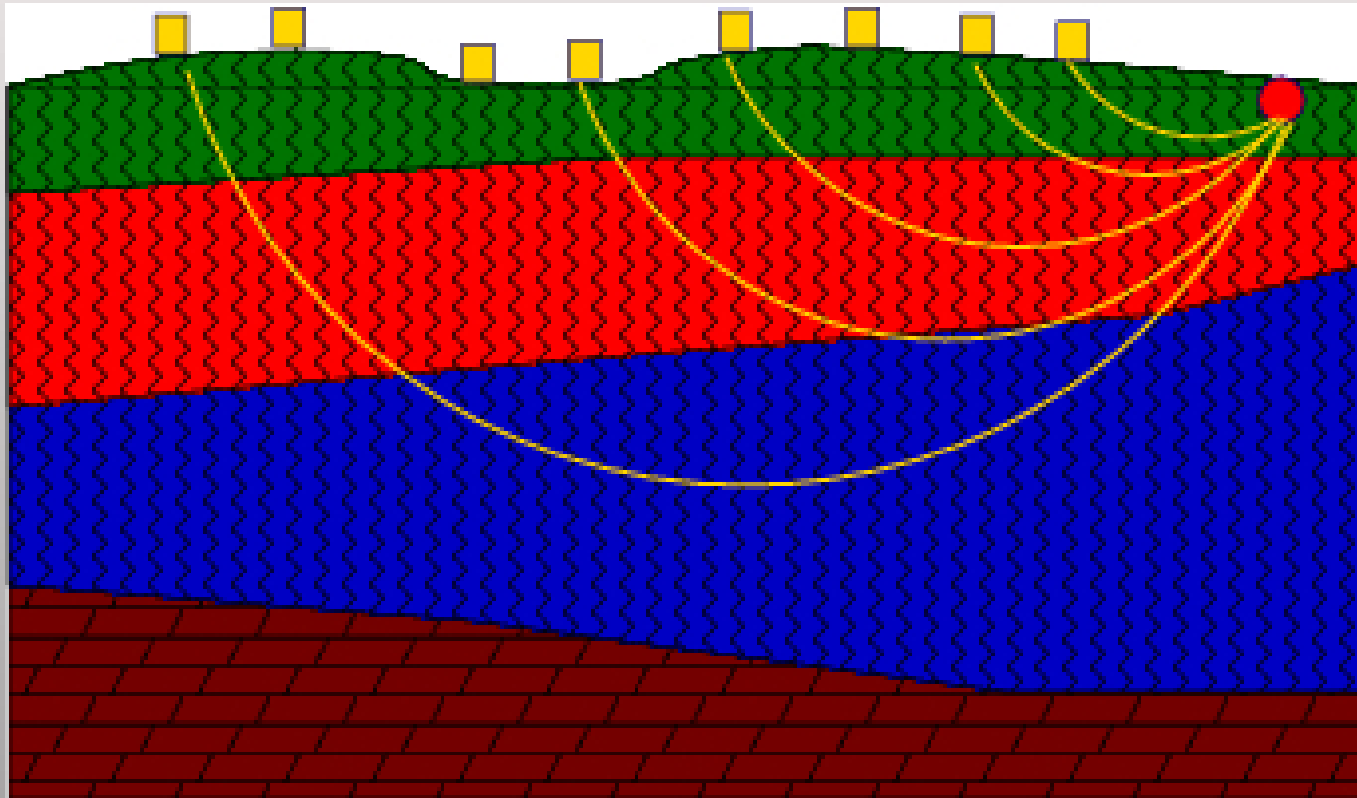
Wojciech Dębski

02.2006

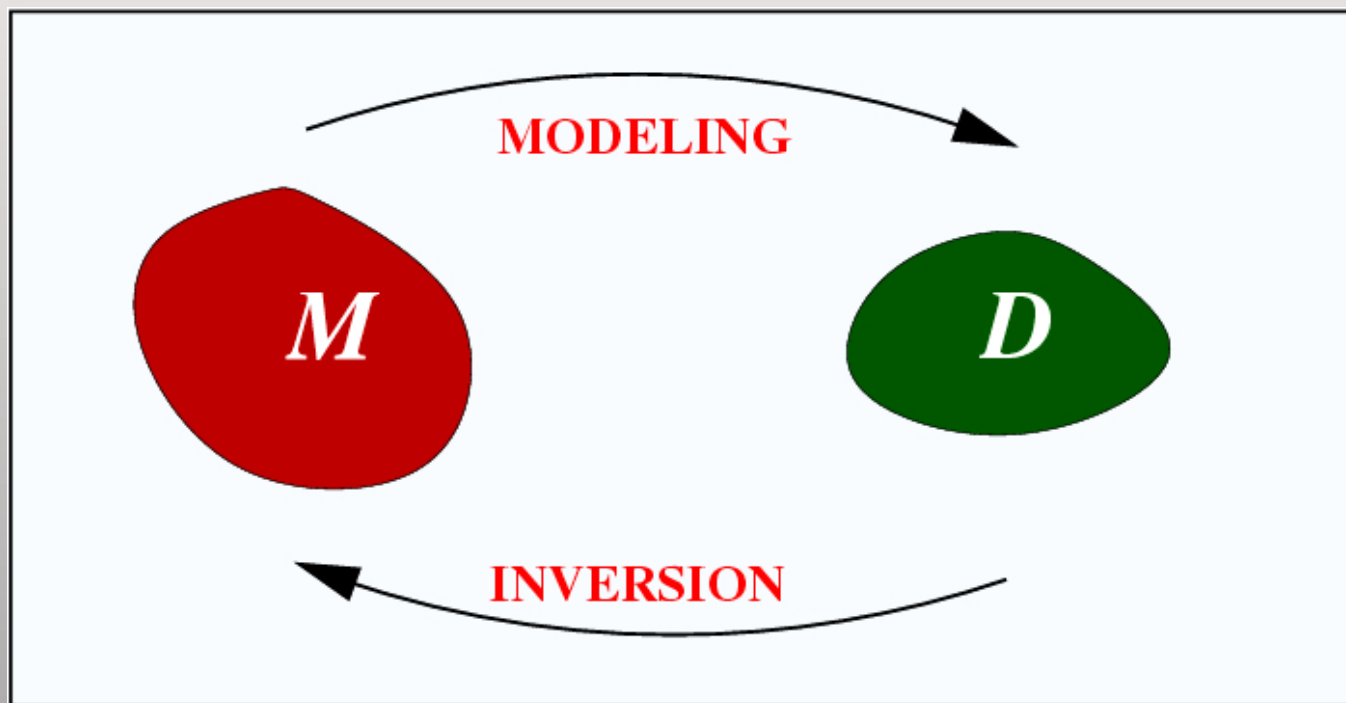
Pomiary bezpośrednie



Pomiary pośrednie - problem odwrotny



Modelowanie i Inwersja



Zagadnienia odwrotne - uogólnione pomiary

$$\mathbf{m} = ?$$

$$\mathbf{d}^{synth} = \mathbf{G}(\mathbf{m})$$

$$\mathbf{d}^{obs} \Rightarrow \mathbf{m}$$

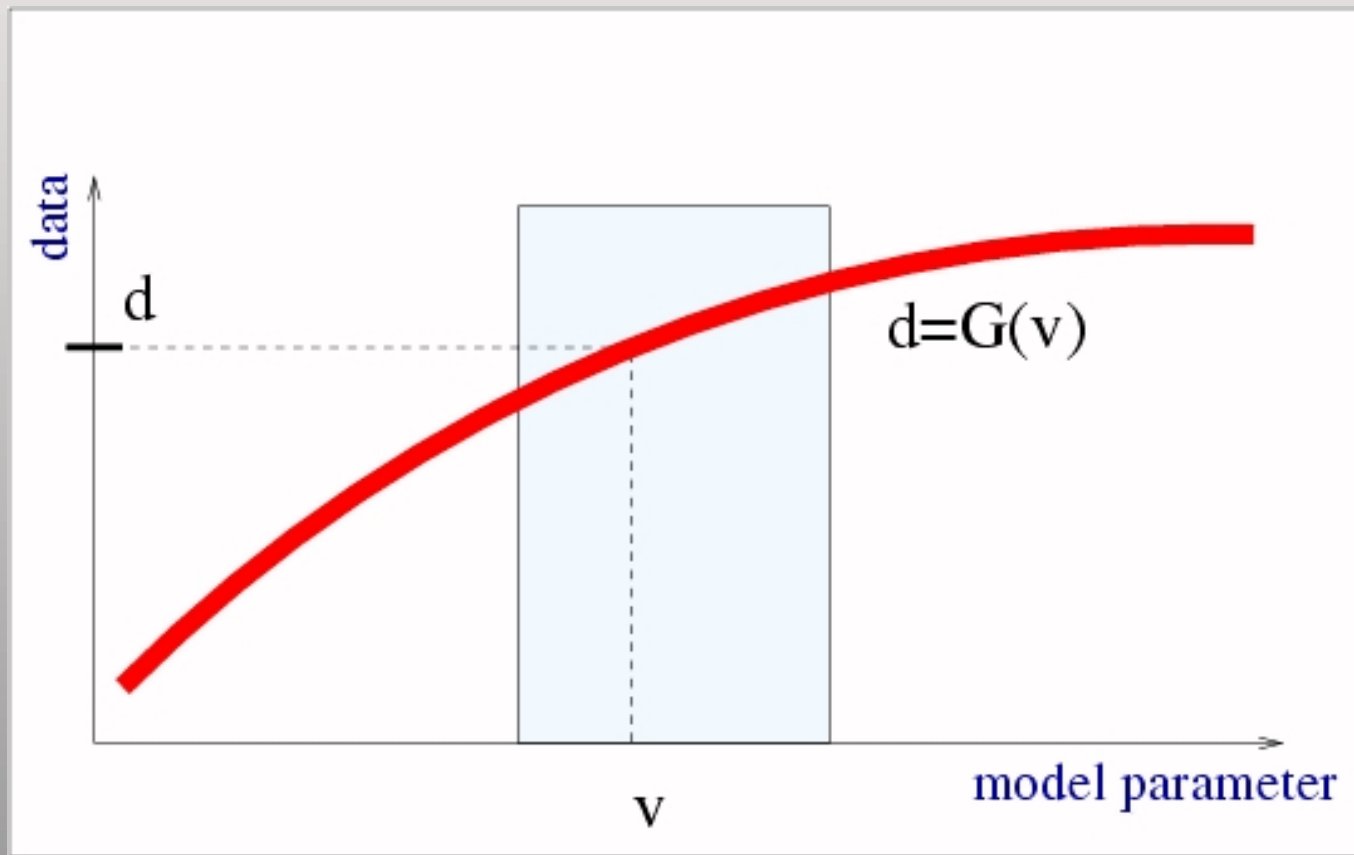
$$||\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{d}^{th}(\mathbf{m})|| + \lambda ||\mathbf{m}^{ml} - \mathbf{m}^{apr}|| = \min$$

$$\mathbf{m}^{true} = \mathbf{m}^{ml} + \epsilon_{\mathbf{m}} \quad \epsilon_{\mathbf{m}} = ???$$

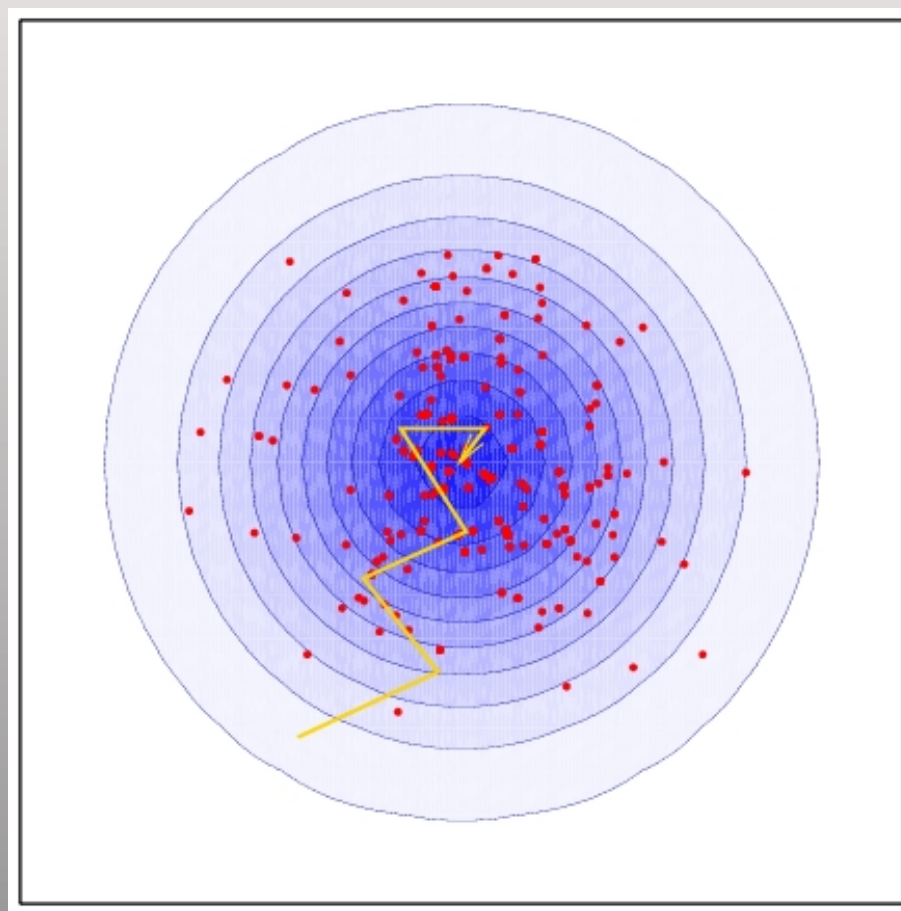
Stosowane Algorytmy

Metoda	Zalety	Ograniczenia
Algebraiczna (LSQR) $\mathbf{m}^{ml} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \gamma \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{d}^{obs}$	- Prostota - wielkoskalowe	- tylko problemy liniowe - czułe na błędy
Optymalizacyjna $S(\mathbf{m}) = \ \mathbf{d}^{th}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}^{obs}\ + \gamma \ \mathbf{m} - \mathbf{m}^{apr}\ $	- Prostota - nieliniowa	- brak oszacowania błędów
Probabilistyczna $\sigma(\mathbf{m}) = f(\mathbf{m}) L(\mathbf{m}, \mathbf{d}^{obs})$	- nieliniowa - pełna analiza błędów	- złożona teoria - Efektywne próbkowanie

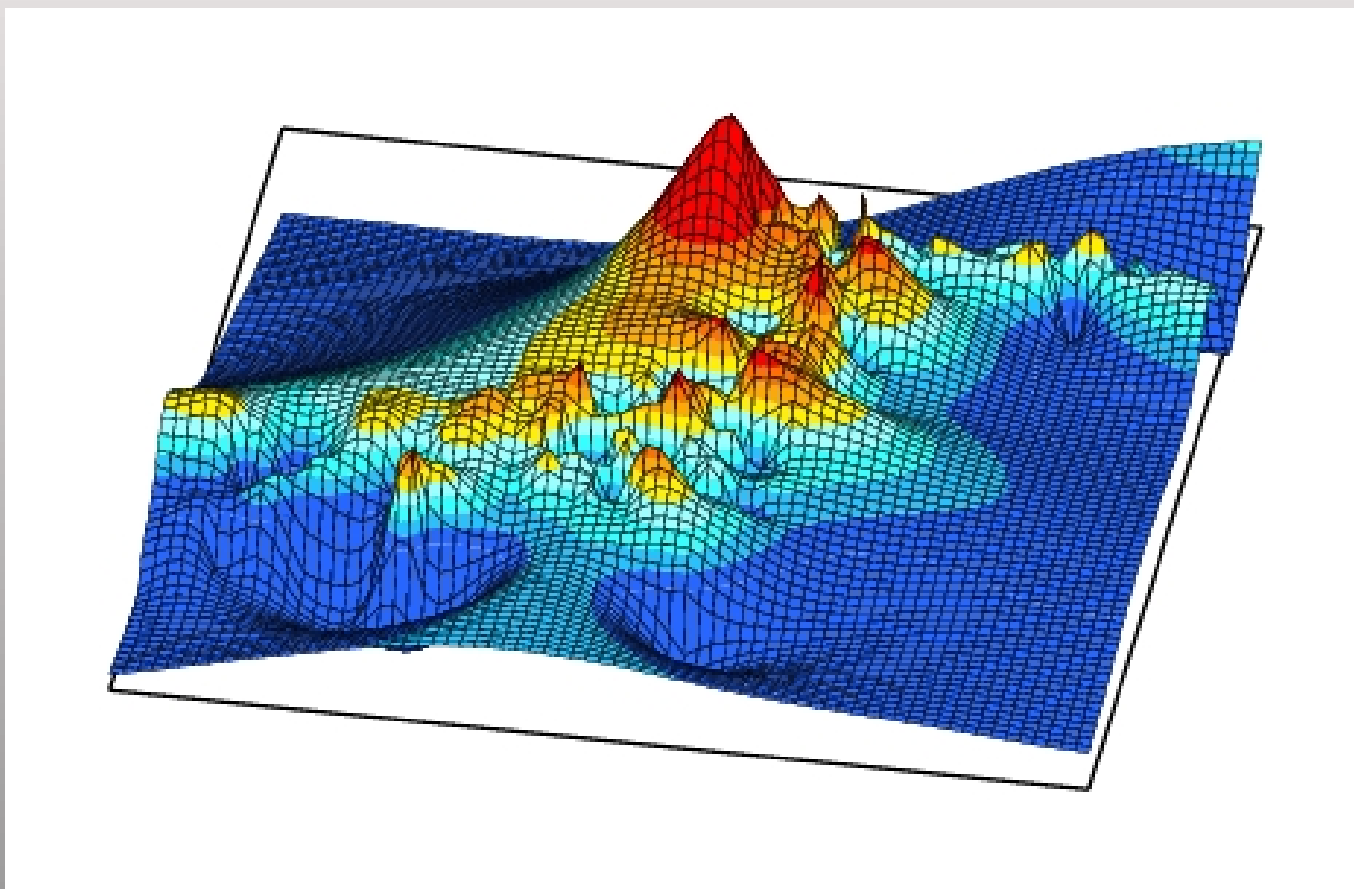
Metoda ALGEBRAICZNA



Metoda OPTYMALIZACYJNA



Metoda PROBABILISTYCZNA

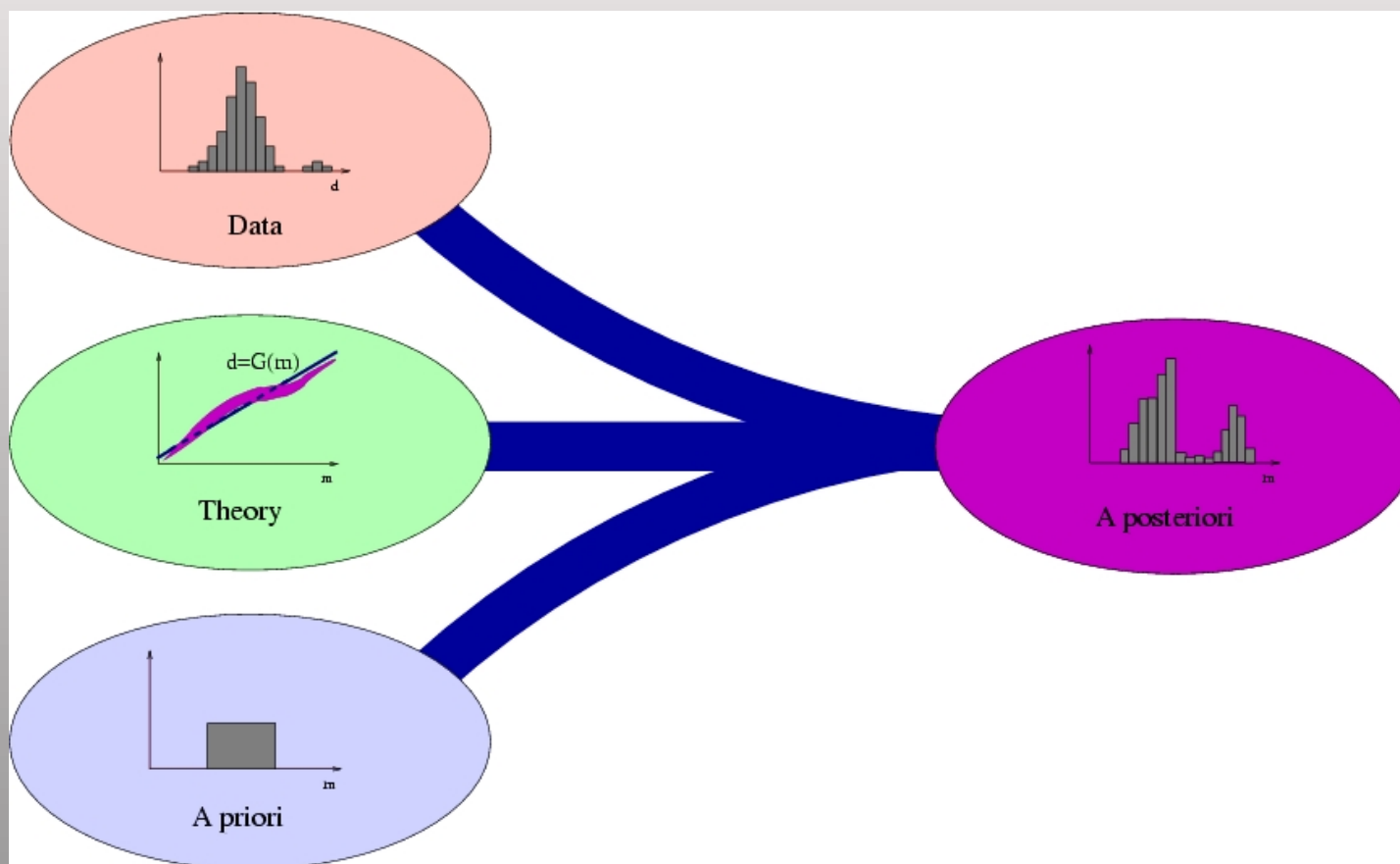


A posteriori pdf

$$\sigma_m(\mathbf{m}) = f_M(\mathbf{m}) \cdot L(\mathbf{m}, \mathbf{d}^{obs})$$

$$L(\mathbf{m}, \mathbf{d}^{obs}) = e^{-\|\mathbf{d}^{obs} - G(\mathbf{m})\|}$$

Inwersja Probabilistyczna (Bayesowska)



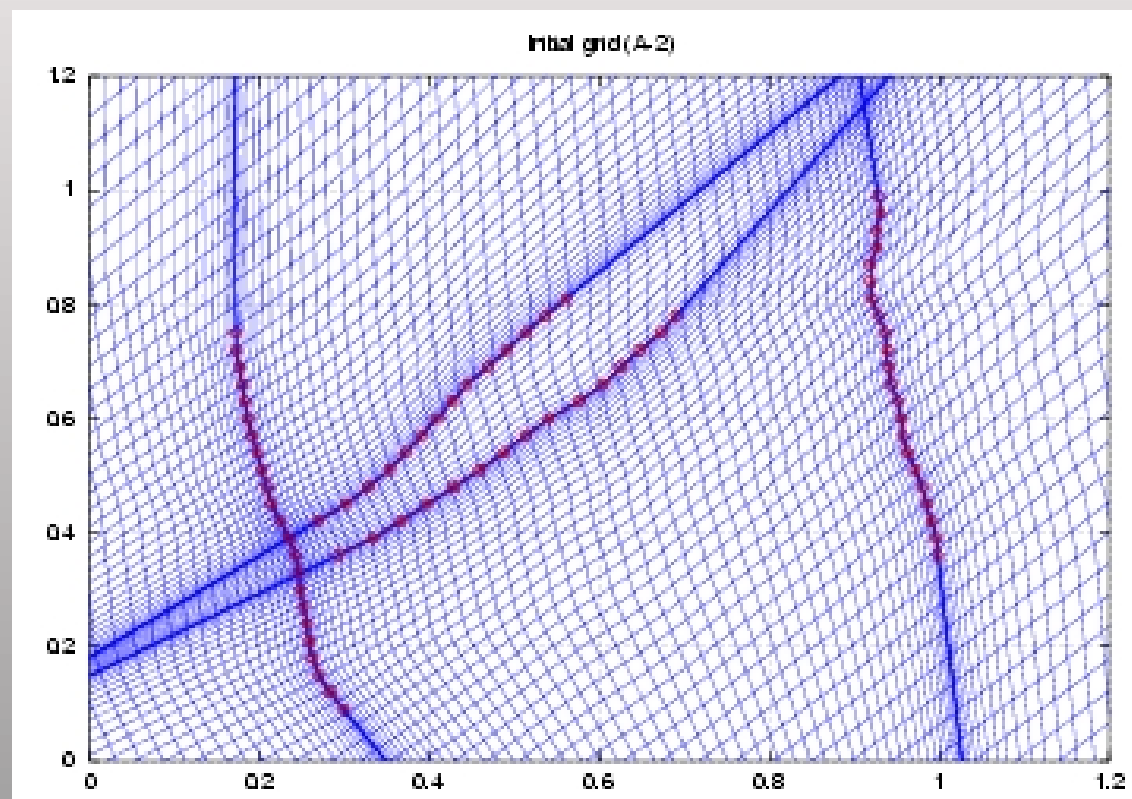
Badanie $\sigma(\mathbf{m})$

- ◆ Poszukiwanie Globalnego Maximum
- ◆ Próbkowanie deterministyczne $\sigma(\mathbf{m})$
- ◆ Próbkowanie Monte Carlo (MCMC)

$$\{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \dots \mathbf{m}_N\}$$

$$N_{[\mathbf{m}-\Delta, \mathbf{m}+\Delta]} \sim \sigma(\mathbf{m})$$

Próbkowanie deterministyczne (geometryczne)



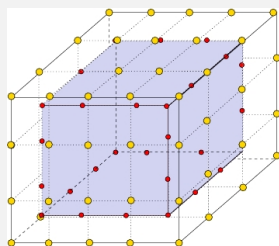
♦ Błędy próbkowania: $\sim \frac{1}{D\sqrt{N}}$

Uwaga na próbkowanie geometryczne!

$$\sigma(\mathbf{m}) \Rightarrow \sigma_{ijk\dots} = \sigma(m_i^1, m_j^2, m_k^3, \dots)$$

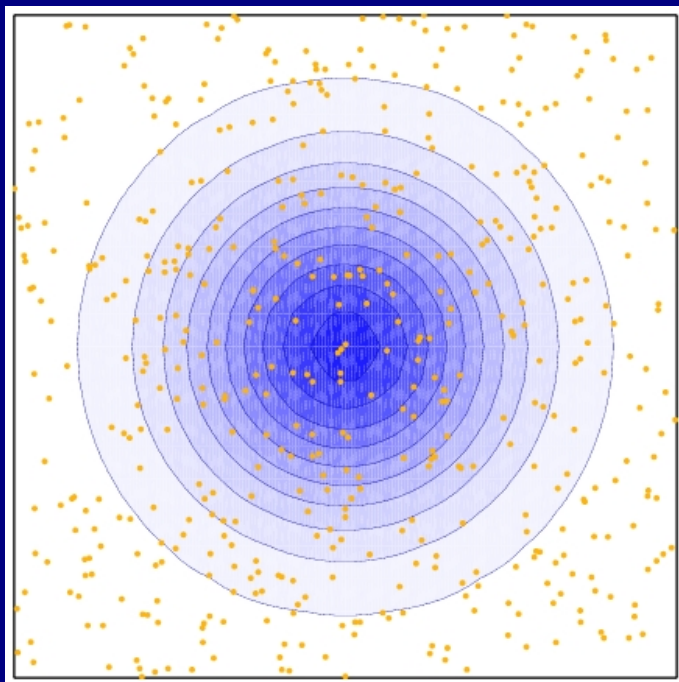
♦ Najbardziej ogólne podejście

♦ Próbkowanie niejednorodne N

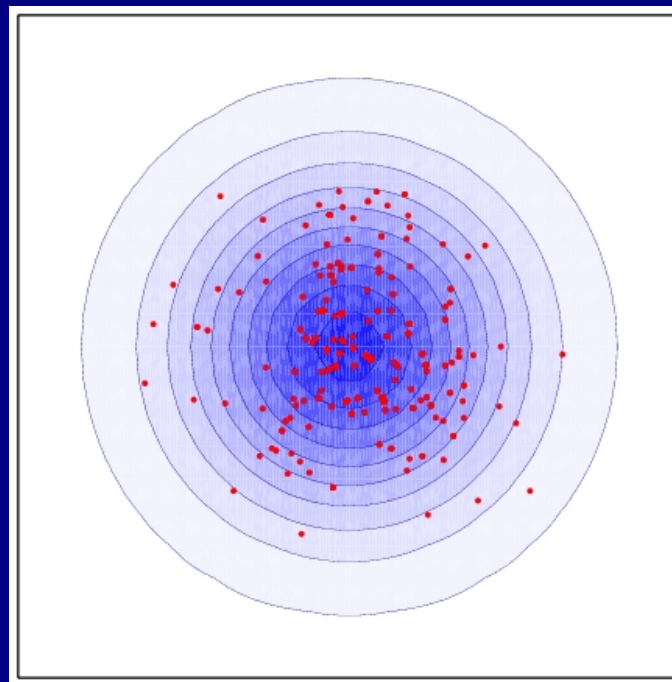


$$\frac{N_V}{N_T} = \left(\frac{p-2}{p} \right)^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Próbkowanie Monte Carlo



Próbkowanie przypadkowe

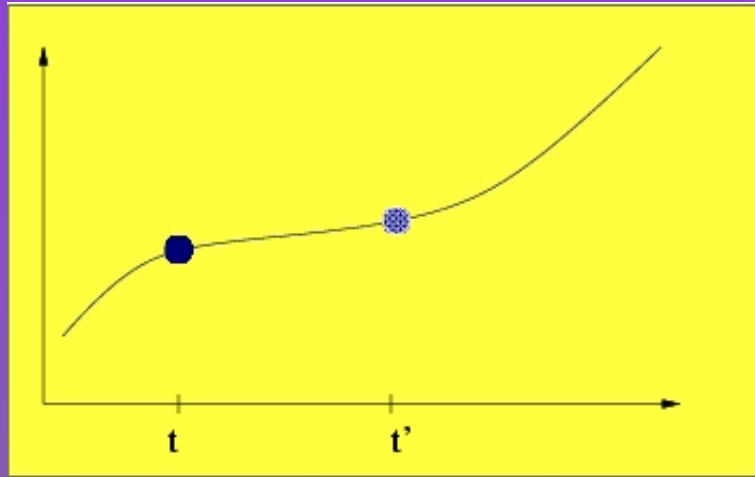


Próbkowanie wazone

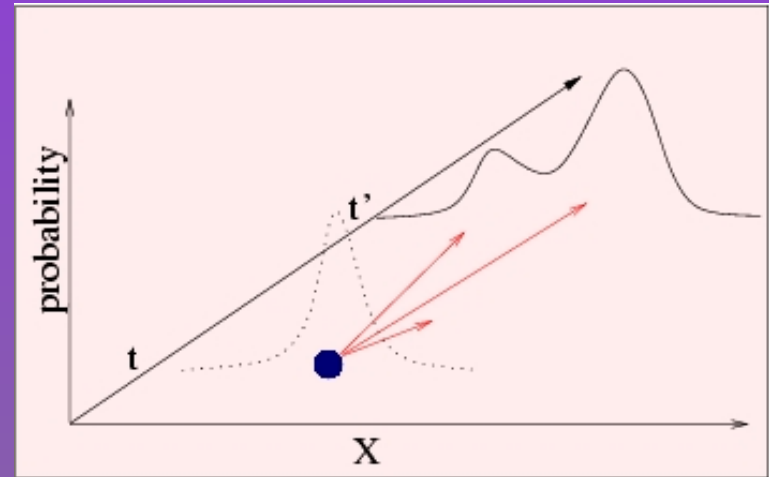
Procesy dynamiczne

(z krótką pamięcią)

deterministyczne



stochastyczne



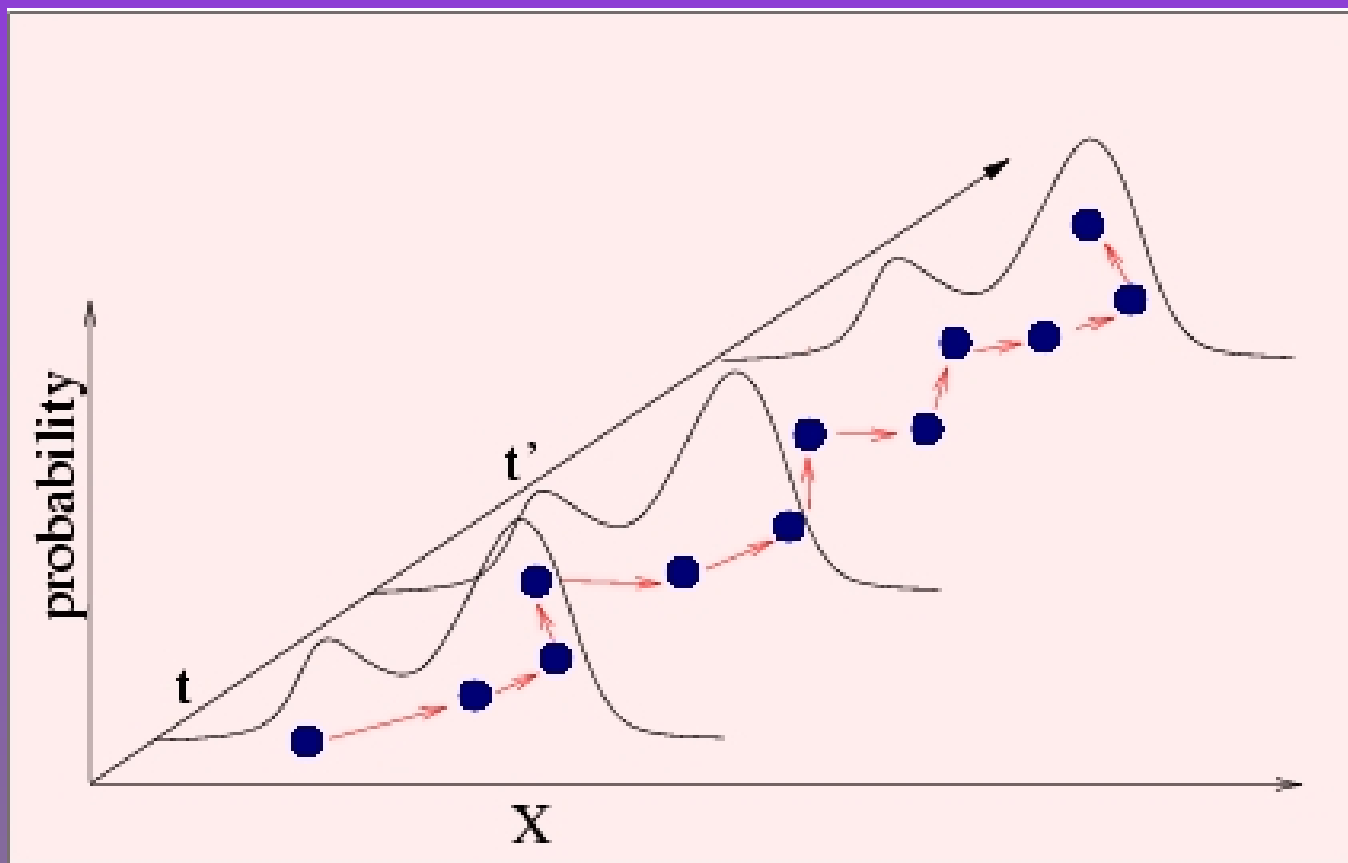
$$X(t + dt) = X(t) + f(X(t), t)dt \quad P(x, t) = \sum_{x'} P(x', t') K(t, x; t', x')$$

Łańcuchy Markowa

- ♦ dyskretny czas: $t_1, t_2, \dots$
- ♦ proces stochastyczny z “krótką” pamięcią $K(t_i, x; t_{i-1}, x_{i-1})$
- ♦ proces ergodyczny:
 - ★ stacjonarny $K(t, x; t', x') = K(x, x')$
 - ★ nieredukowalny: (graf nieredukowalny)
 - ★ aperiodyczny
- ♦ Istnieje rozkład stacjonarny: $\pi(x') = \pi(x)$

$$\pi(x) = \int_{x'} \pi(x') K(x; x') dx'$$

Stacjonarny łańcuch Markowa

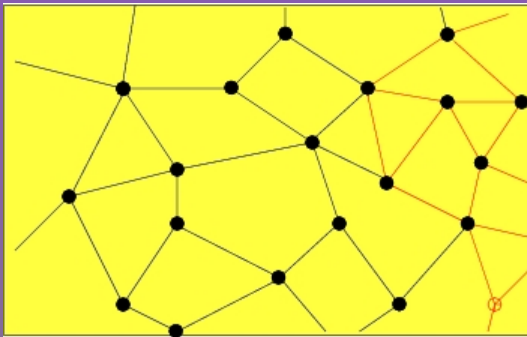


Realizacja łańcucha Markowa

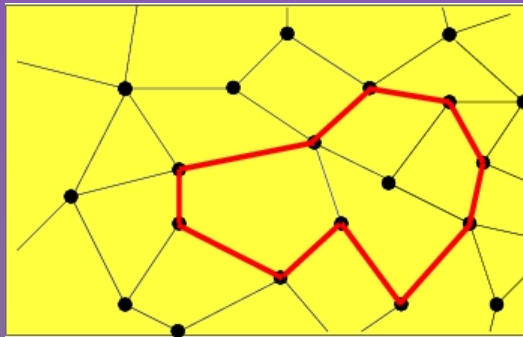
Błądzenie przypadkowe (ang. random walk)

$$x_{i+1} = x : p_{i+1} = K(x|x_i)$$

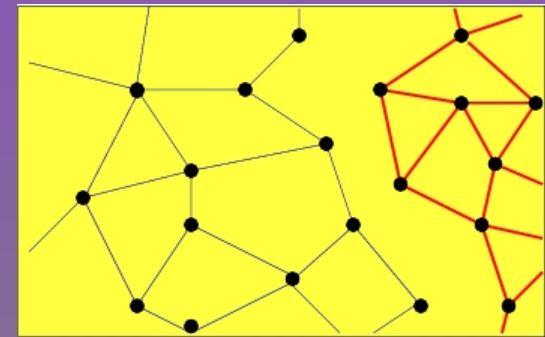
ergodyczny



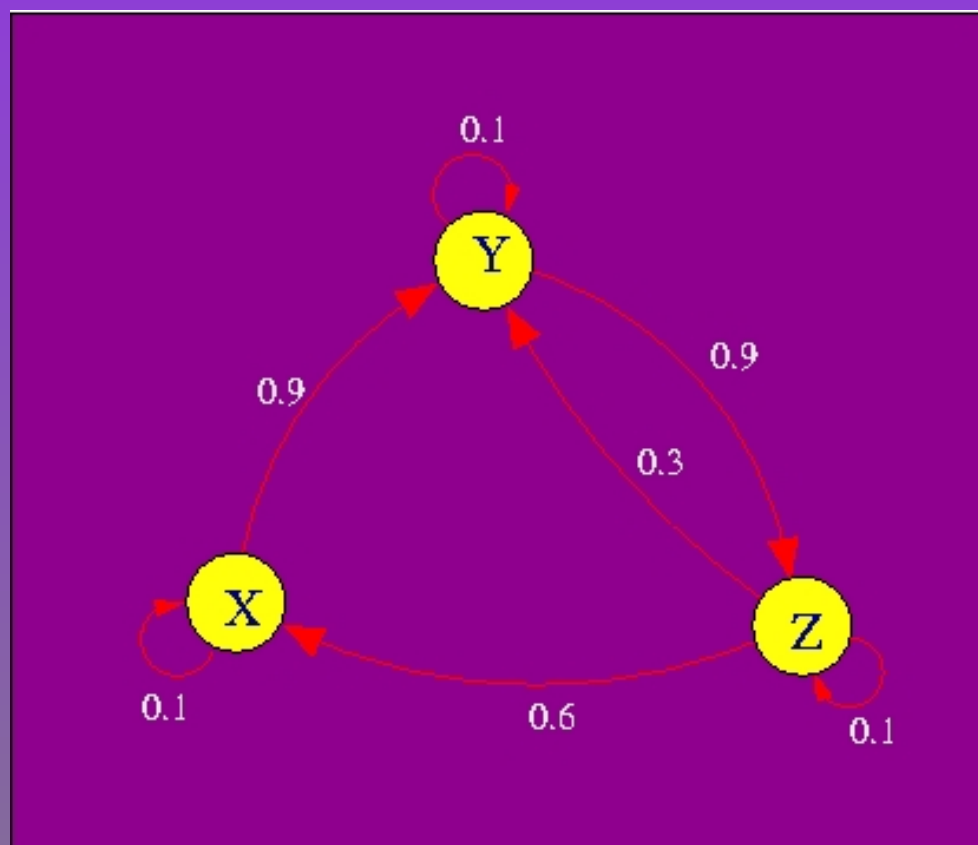
periodyczny



redukowalny



Algorytm przykład



Algorytm przykład

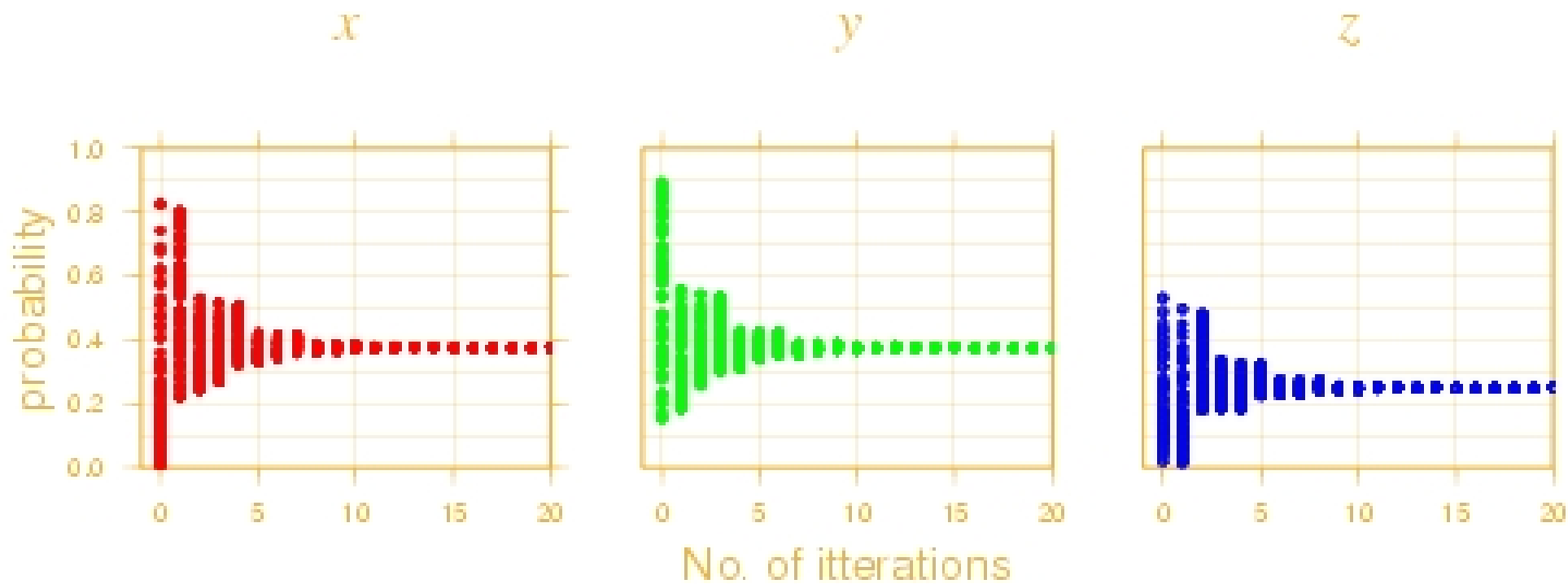
$$\mathbf{p}_i = (p_x, p_y, p_z)$$

Równanie ewolucji

$$\mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{p}_i \cdot \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \\ 0.6 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p}_{i \rightarrow \infty} = ???$$

Algorytm przykład



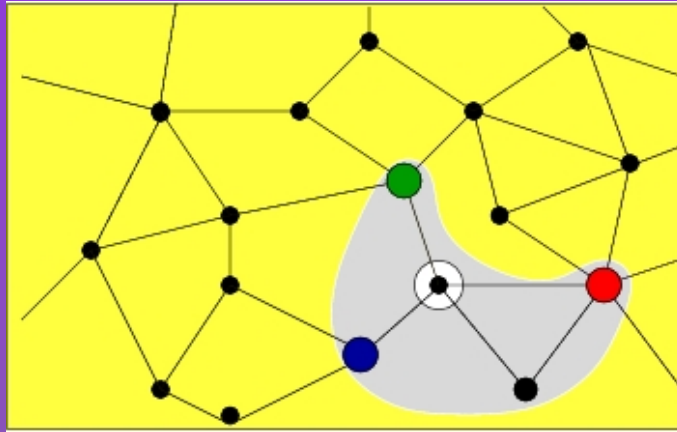
Zastosowanie do zagadnienia odwrotnego

Jak skonstruować łańcuch Markowa o zadanym rozkładzie stacjonarnym $p(x)$?

Proces błądzenia przypadkowego
(Algorytm Metropolisa-Hastinga)

Określenie procesu

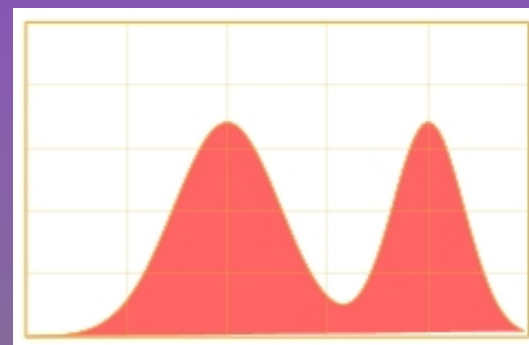
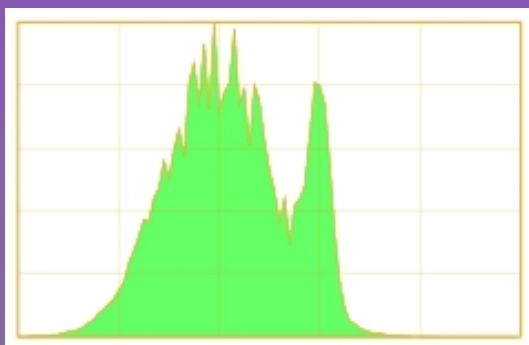
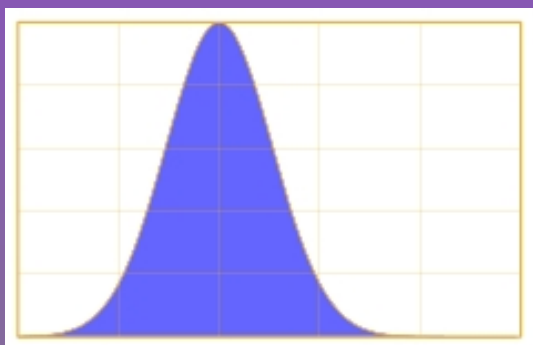
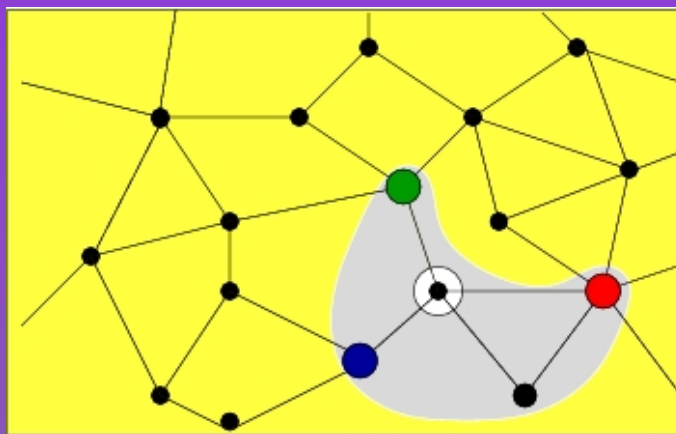
1.



2.

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{M1} & \cdots & K_{MN} \end{pmatrix}$$

Grafy przejścia - ciągłe wartości



Algorytm Metropolisa-Hastinga

$$x_{i+1} = x_i + \delta x$$

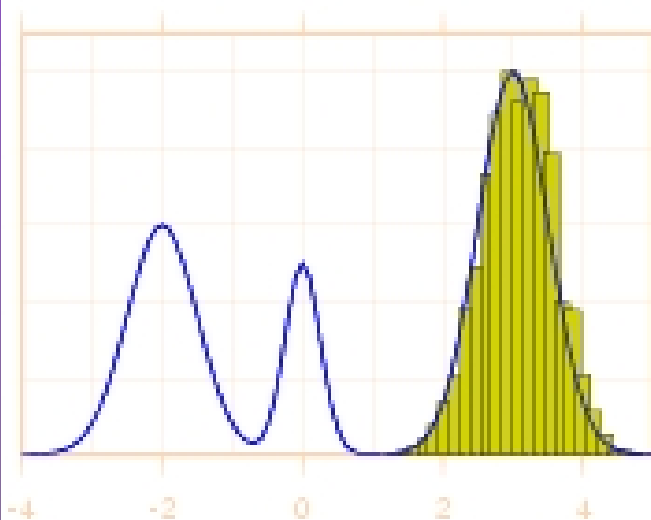
$$K(x_{i+1}; x_i) = \min \left\{ 1, \frac{p(x_{i+1})}{p(x_i)} \right\}$$

Generuje próbki z rozkładu $p(x)$

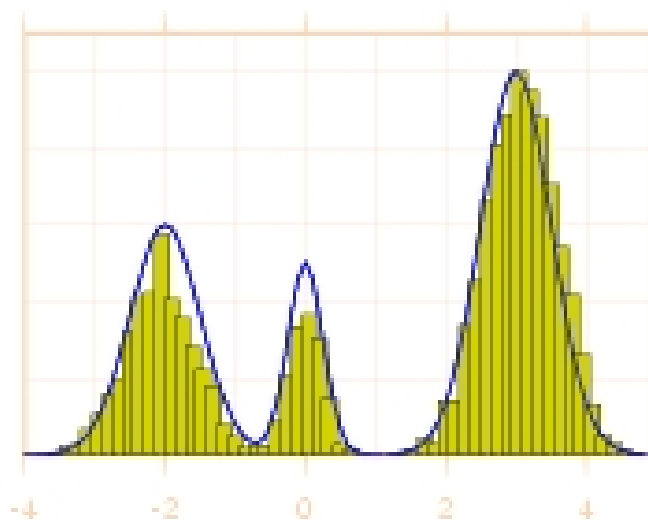
Algorytm MH - ograniczenia

$$x_{i+1} = x_i + \delta x$$

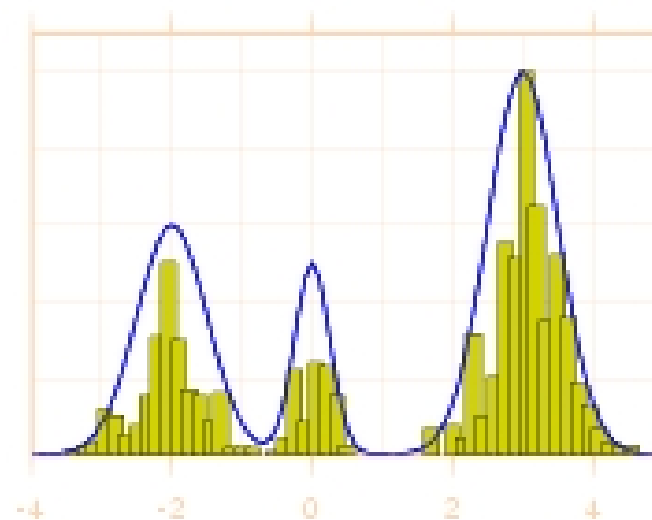
too small



optimum



too large



Tomografia prędkościowa

Parametryzacja:

$$v(x, y, z) \longrightarrow \{v_i\}_{i=1 \dots M}$$

$$t_{sr} = \int_{sr} \frac{dl}{v} \longrightarrow \mathbf{d} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}$$

Numerical optimization

$$S(\mathbf{m}) = ||\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}|| + \lambda ||\mathbf{m}^{apr} - \mathbf{m}|| = min$$

Tomografia prędkościowa

Podejście probabilistyczne

Aposteriori pdf:

$$f(\mathbf{m}) = e^{-\|\mathbf{m} - \mathbf{m}^{apr}\|/Cm}$$

$$\sigma_M(\mathbf{m}) = f(\mathbf{m}) \exp^{-\|\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}\|/Cd}$$

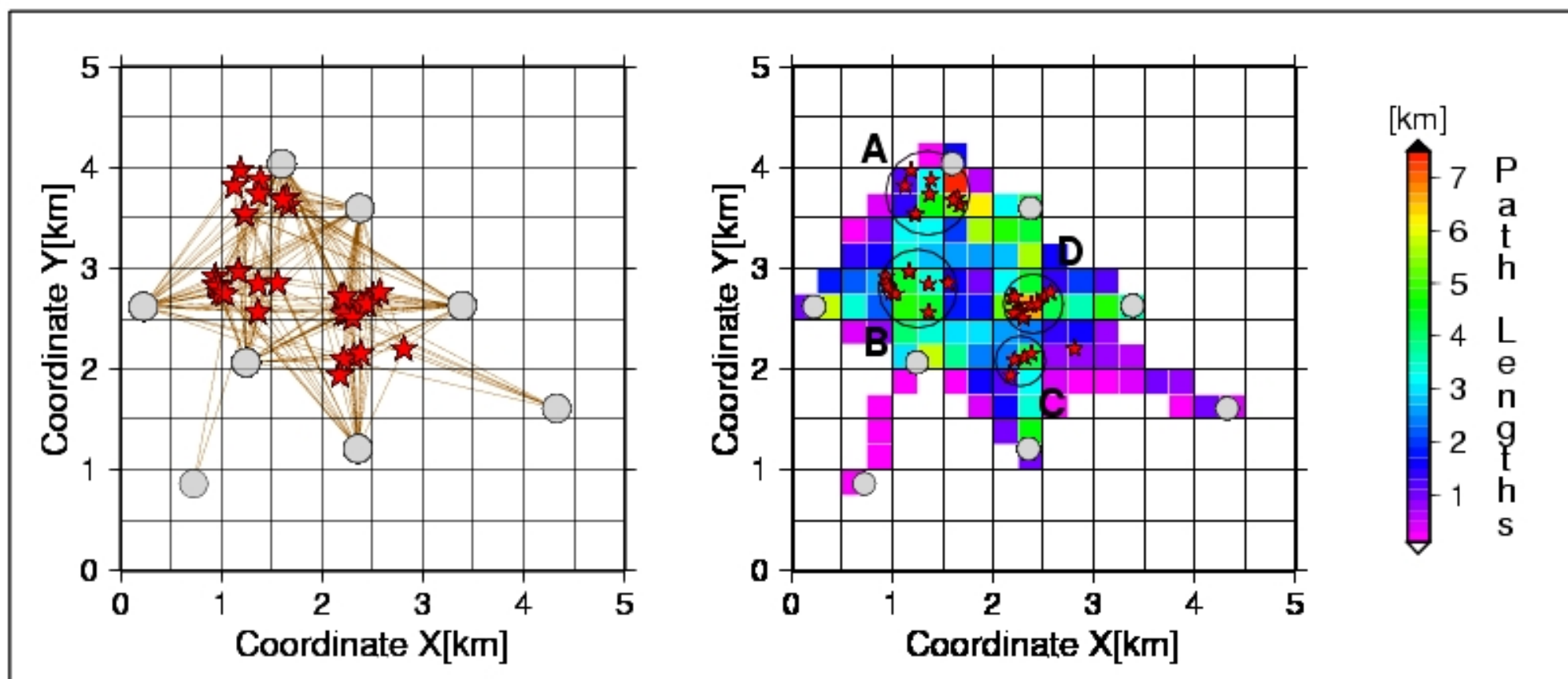
Rozwiązanie

$$\blacklozenge \mathbf{m}^{ml} = \mathbf{m}_i : \sigma_M(\mathbf{m}_i) = \max$$

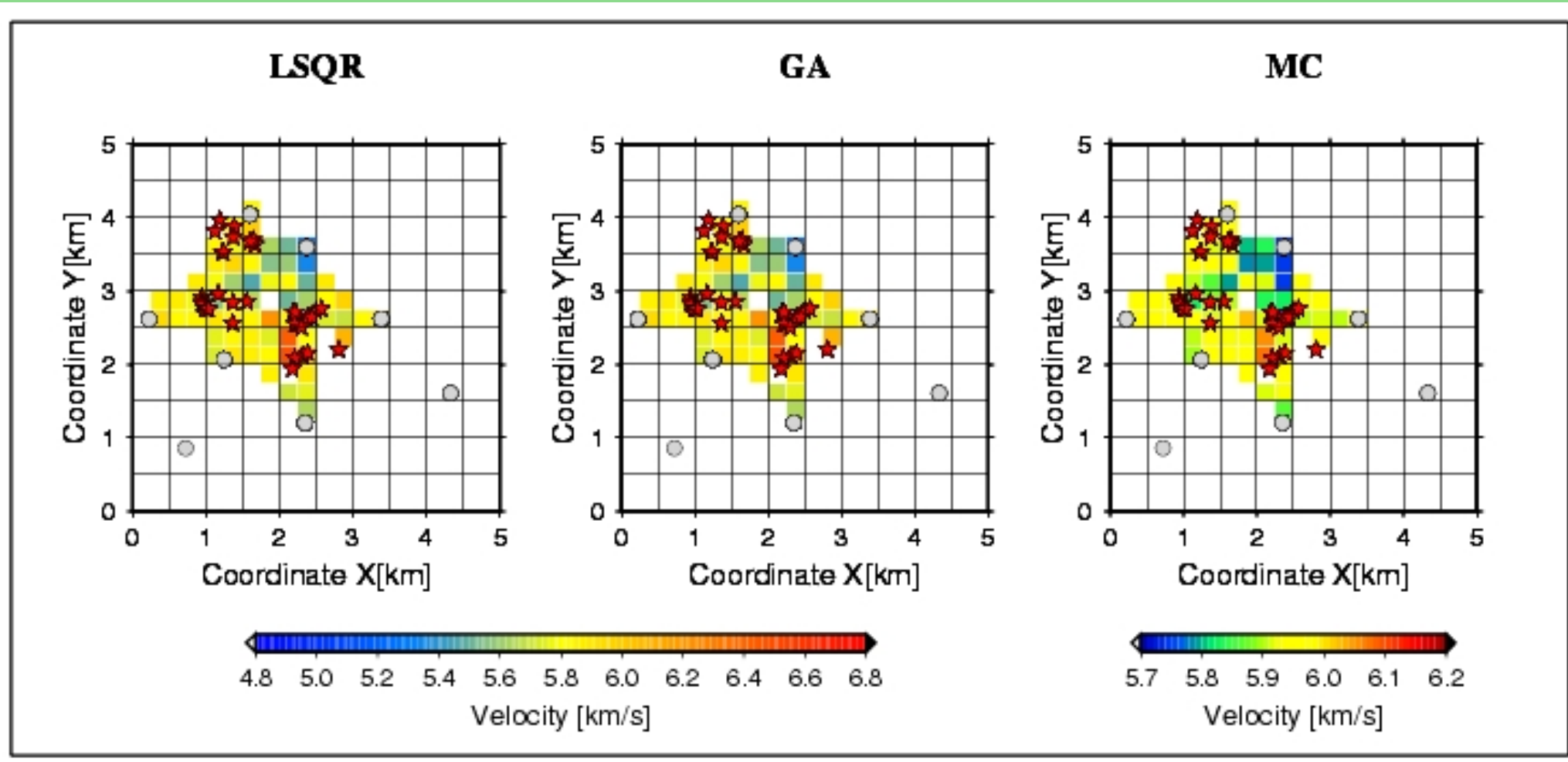
$$\blacklozenge \mathbf{m}^{avr} = \sum_{samples} \mathbf{m}_s$$

$$\blacklozenge \epsilon_{\mathbf{m}} = \sum_{samples} (\mathbf{m}^{avr} - \mathbf{m}_s)^2$$

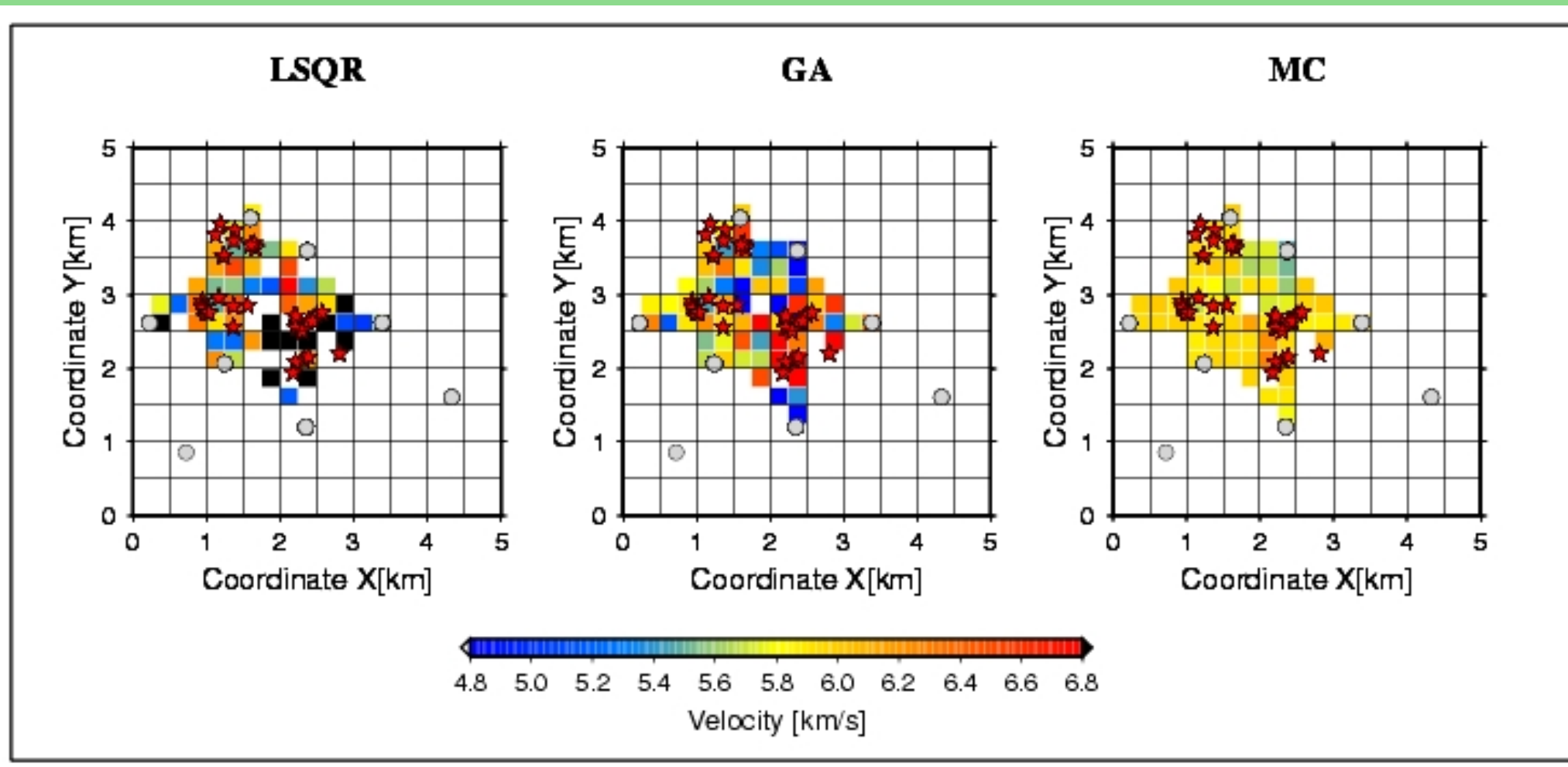
Kopalnia miedzi “Rudna”



Tomogramy - optymalne tłumienie

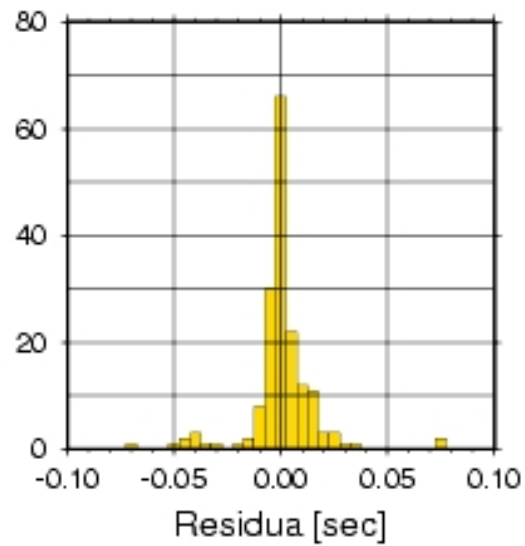


Tomogramy - brak tłumienia

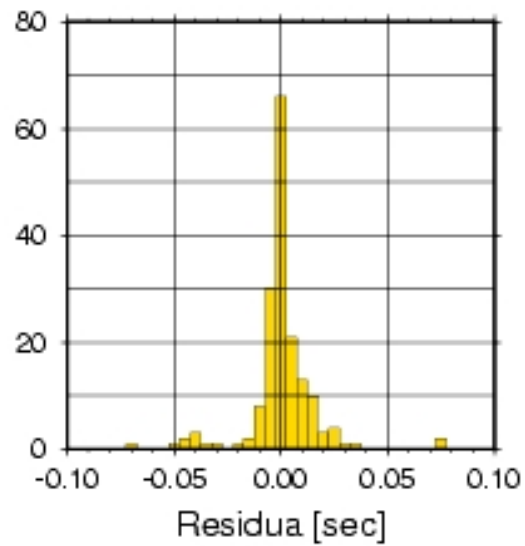


Residua

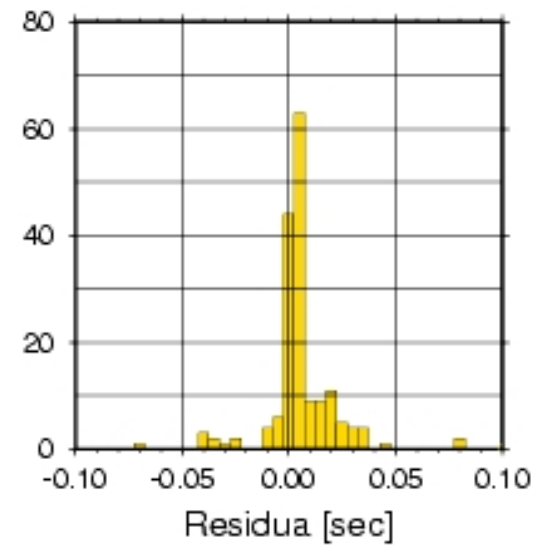
LSQR



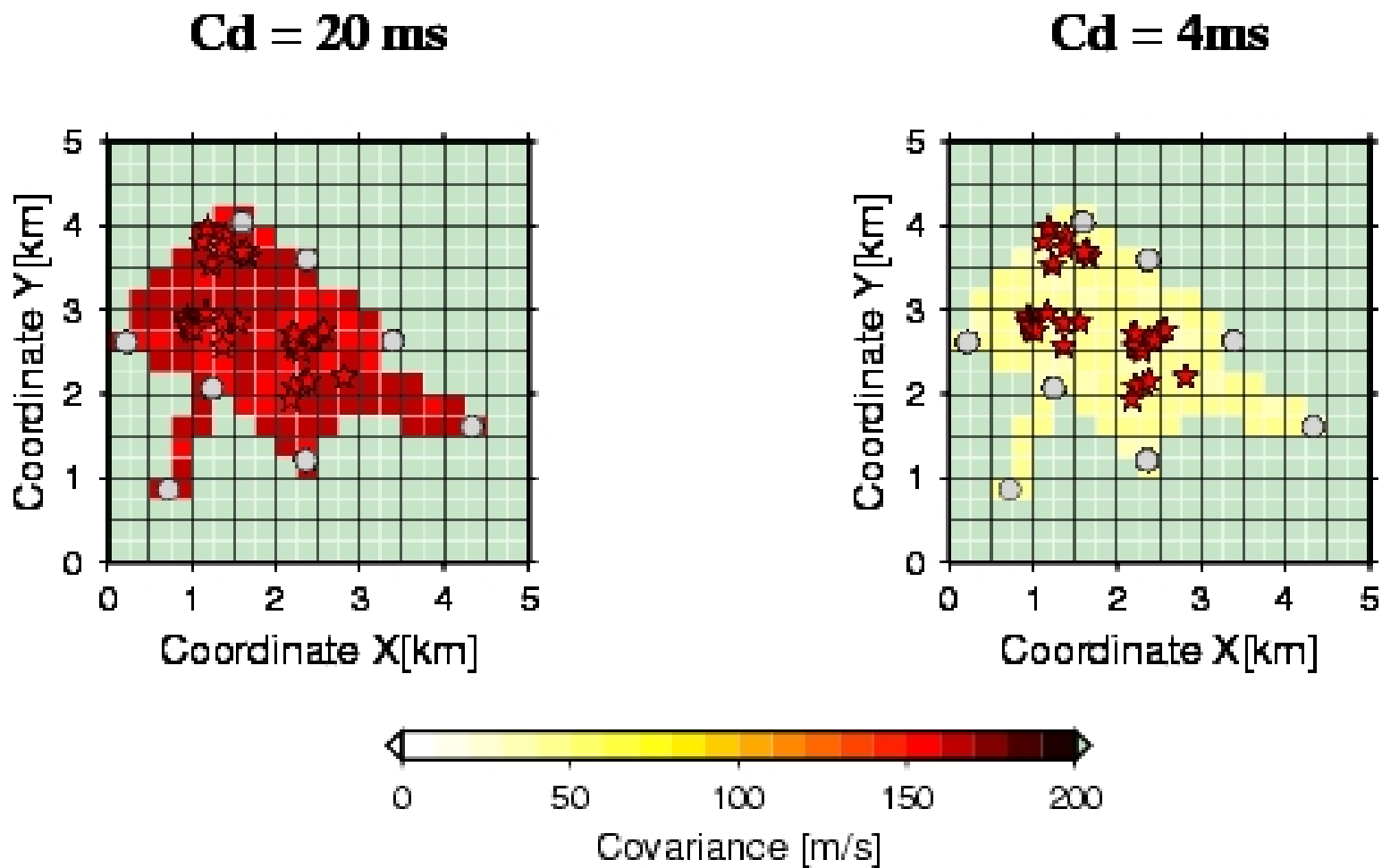
GA



MC

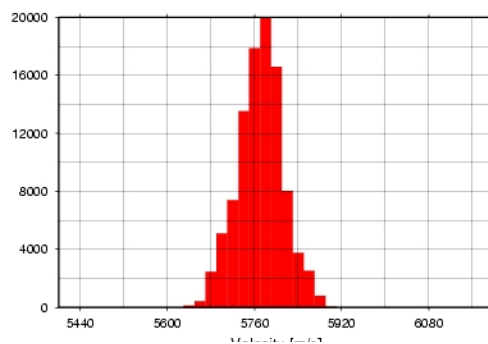


Rozkład przestrzenny błędów

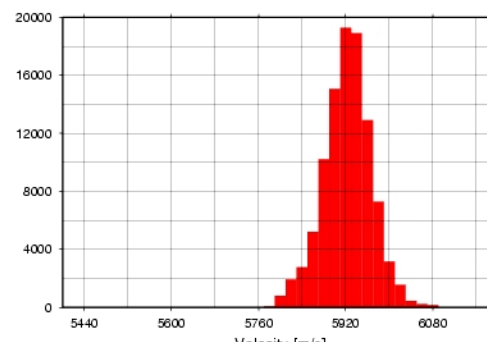


Wybrane 1D rozkłady PDF

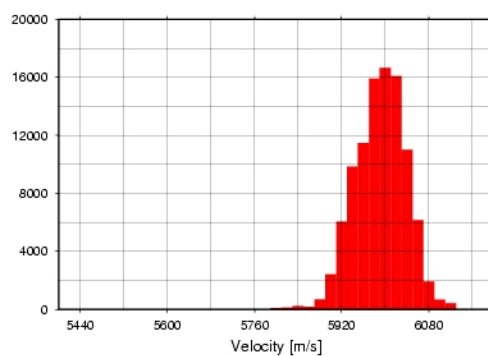
$C_d=0.004$ $C_m=400$ $C_s=267$



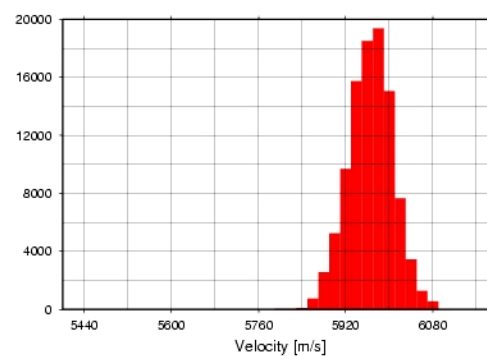
$C_d=0.004$ $C_m=400$ $C_s=226$



$C_d=0.004$ $C_m=400$ $C_s=169$



$C_d=0.004$ $C_m=400$ $C_s=201$



Filozofia “movies”

Co jest rozwiązaniem zagadnienia odwrotnego?

- ♦ model najbardziej prawdopodobny: $\mathbf{m}^{ml} : \sigma(\mathbf{m}^{ml}) = \max$
- ♦ model średni
- ♦ prawdopodobieństwa rozkładu - brzegowe i warunkowe
- ♦ zbiór prbek MC - “movie”



Dziękuję za uwagę