

Metody inwersyjne w geofizyce

(7)

Zagadnienie odwrotne (ogólnie)

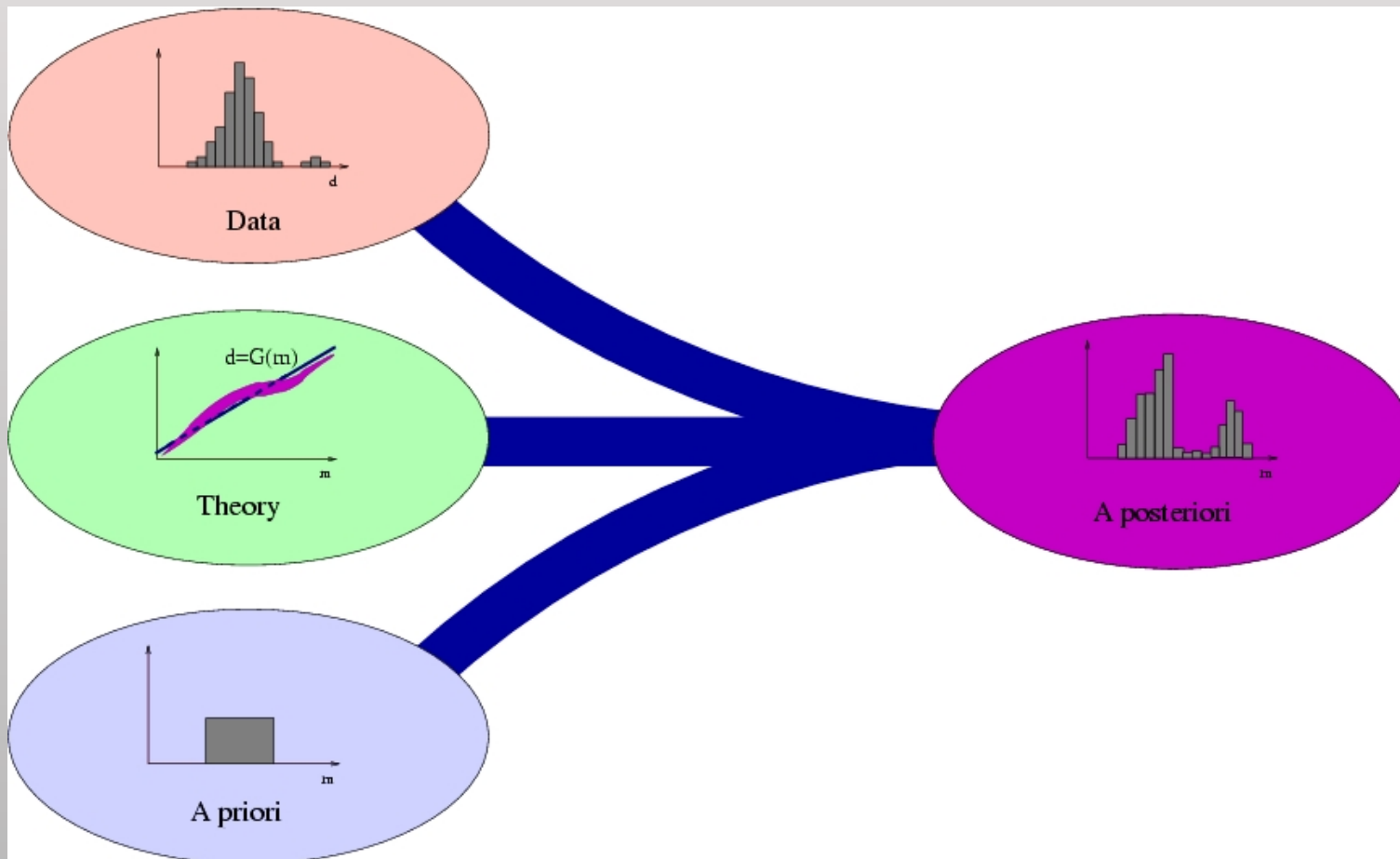
zagadnienie odwrotne



proces wnioskowania

Inwersja - łączenie informacji

(Wnioskowanie statystyczne)



Rozwiązanie problemu inwersyjnego

1. obserwacje: $p(\mathbf{d})$
 2. teoria : $q(\mathbf{m}, \mathbf{d})$
 3. *a priori* : $f(\mathbf{m}, \mathbf{d})$
-

$$(p \wedge q)(\cdot) = \frac{p(\cdot) q(\cdot)}{\mu(\cdot)}$$

Rozkład *A posteriori pdf* na $M \times D$

Trzy kroki:

1. Uogólnienie wszystkich rozkładów na przestrzeń $M \times D$
2. Utworzenie uogólnionej funkcji podobieństwa:

$$\mathcal{L}(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = (p \wedge q)(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = \frac{p(\mathbf{m}, \mathbf{d}) q(\mathbf{m}, \mathbf{d})}{\mu(\mathbf{m}, \mathbf{d})}$$

3. utworzenie rozkładu *A posteriori*:

$$\sigma(m, d) \approx (\mathcal{L} \wedge f)(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = \frac{\mathcal{L}(\mathbf{m}, \mathbf{d}) f(\mathbf{m}, \mathbf{d})}{\mu(\mathbf{m}, \mathbf{d})}$$

A posteriori pdf

$$\sigma(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = \frac{p(\mathbf{m}, \mathbf{d}) q(\mathbf{m}, \mathbf{d}) f(\mathbf{m}, \mathbf{d})}{\mu^2(\mathbf{m}, \mathbf{d})}$$

Brzegowe rozkłady *A posteriori*

$$\sigma_m(m) = \int_D \sigma(m, d) dD$$

$$\sigma_d(d) = \int_M \sigma(m, d) dM$$

A posteriori pdf

$$\sigma_m(m) = f(m) \cdot L(m, d^{obs})$$

$$L(\mathbf{m}, \mathbf{d}^{obs}) = \int_D p(\mathbf{d}, \mathbf{d}^{obs}) \frac{q(\mathbf{m}, \mathbf{d})}{\mu(\mathbf{m}, \mathbf{d})} d\mathbf{d}$$

A posteriori pdf

rozkłady Gaussowskie

$$f(\mathbf{m}) = \exp \left\{ -(\mathbf{m} - \mathbf{m}^{apr})^T \mathbf{C}_M^{-1} (\mathbf{m} - \mathbf{m}^{apr}) \right\}$$

$$p(\mathbf{d}) = \exp \left\{ -(\mathbf{d} - \mathbf{d}^{true})^T \mathbf{C}_D^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^{true}) \right\}$$

$$q(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = \exp \left\{ -(\mathbf{d} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{m})^T \mathbf{C}_T^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}) \right\}$$

$$\sigma_m(\mathbf{m}) = f(\mathbf{m}) \int_D p(\mathbf{d}, \mathbf{d}^{obs}) q(\mathbf{m}, \mathbf{d}) d\mathbf{d}$$

A posteriori pdf

rozkłady Gaussowskie -rozwiązanie

$$\sigma_m(\mathbf{m}) = \exp \left\{ -(\mathbf{m} - \mathbf{m}^{ml})^T \mathbf{C}_P^{-1} (\mathbf{m} - \mathbf{m}^{ml}) \right\}$$

$$\mathbf{C}_O = \mathbf{C}_T + \mathbf{C}_D$$

$$\mathbf{C}_P = (\mathbf{G}^T \mathbf{C}_O^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{C}_M)^{-1}$$

$$\mathbf{m}^{ml} = \mathbf{m}^{apr} + \mathbf{C}_P \mathbf{G}^T \mathbf{C}_O^{-1} (\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{m})$$

Podejście optymalizacyjne i probabilistyczne podobieństwa i różnice (A)

Podejście optymalizacyjne (klasyczne)

$$\|\mathbf{G}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}^{obs}\| + \lambda \|\mathbf{m} - \mathbf{m}^a\| = \min$$

- ♦ metoda nieliniowa
- ♦ fizyczny sens regularyzacji
- ♦ poszukujemy jednego (optymalnego) rozwiązania
- ♦ zaniebane wszystkie błędy i niedokładności

Podejście optymalizacyjne i probabilistyczne podobieństwa i różnice (B)

Podejście probabilistyczne (Bayesowskie)

$$\sigma(\mathbf{m}) = f(\mathbf{m})L(\mathbf{m}, \mathbf{d}^{obs})$$

- ♦ metoda nieliniowa
- ♦ fizyczny sens członu $f(\mathbf{m})$
- ♦ przeszukiwana cała przestrzeń $\mathbf{M}$ ($\mathbf{M} \times \mathbf{D}$)
- ♦ uwzględnienie wszystkich błędów i niedokładności

Podjęcie optymalizacyjne i probabilistyczne podobieństwa i różnice (C)

$$\| \mathbf{G}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}^{obs} \| + \lambda \| \mathbf{m} - \mathbf{m}^{apr} \| = \min$$

$$\mathbf{d}^{obs} = \mathbf{d}^{true} + \epsilon_{obs}$$

$$\mathbf{m}^{apr} = \mathbf{m}^{true} + \epsilon_{apr}$$

$$\mathbf{d}^{th} = \mathbf{G}(\mathbf{m}) + \epsilon_{th}$$

$$\| \mathbf{G}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}^{true} + \epsilon_{obs} + \epsilon_{th} \| + \lambda \| \mathbf{m} - \mathbf{m}^{apr} + \epsilon_{apr} \| = \min$$

Podjęcie optymalizacyjne i probabilistyczne podobieństwa i różnice (D)

Rozwiązania dla różnych realizacji ϵ_{obs} , ϵ_{th} ϵ_{apr} :

$$\mathbf{m}^{(1)}, \mathbf{m}^{(2)}, \dots \mathbf{m}^{(K)}$$

Pozwala utworzyć histogram rozwiązań:

$$h(\mathbf{m}) = \frac{N^\alpha(\mathbf{m})}{N^K}$$

który jest przybliżeniem $\sigma(\mathbf{m})$

Technika nieefektywna w przypadkach wielowymiarowych!!!

Rozwiązywanie zagadnień odwrotnych

co musimy wiedzieć?

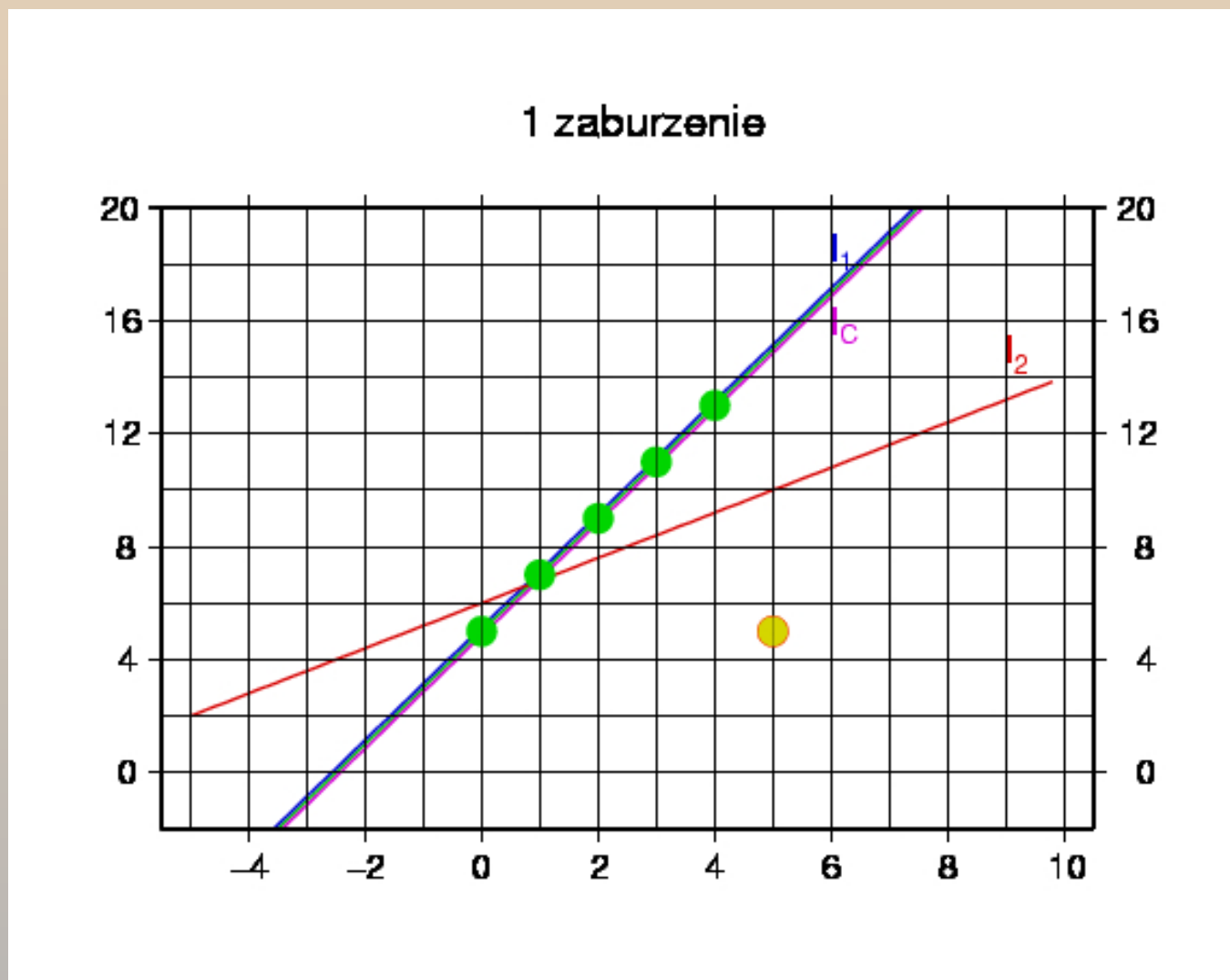
wielkości	optymalizacyjne	probabilistyczne
dane pomiarowe	tak	tak (warunkowo)
$\mathbf{d}^{th} = \mathbf{G}(\mathbf{m})$	tak	tak (warunkowo)
$\mathbf{m}^{apr}$	tak	nie
wsp. tłumienia	tak	nie
norma	tak	nie
statystyka błędów	nie	tak

Normy ...

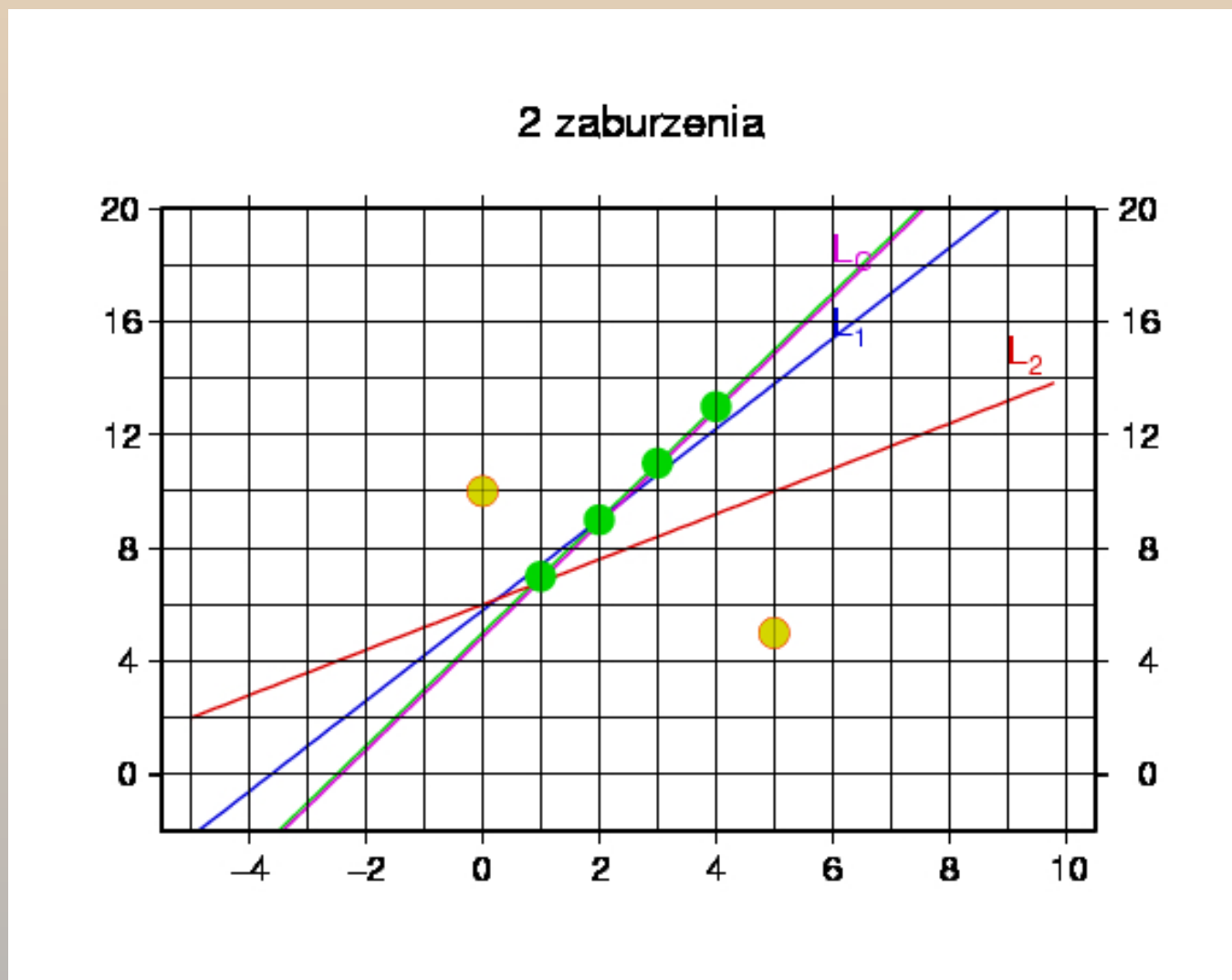
$$\|\mathbf{G}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}^{obs}\|_D + \lambda \|\mathbf{m} - \mathbf{m}^{apr}\|_M = \min$$

$$\sigma(\mathbf{m}) = f(\mathbf{m}) \exp(-\|\mathbf{G}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}^{obs}\|_D)$$

“krzepkość” norm (ang. robustnes)



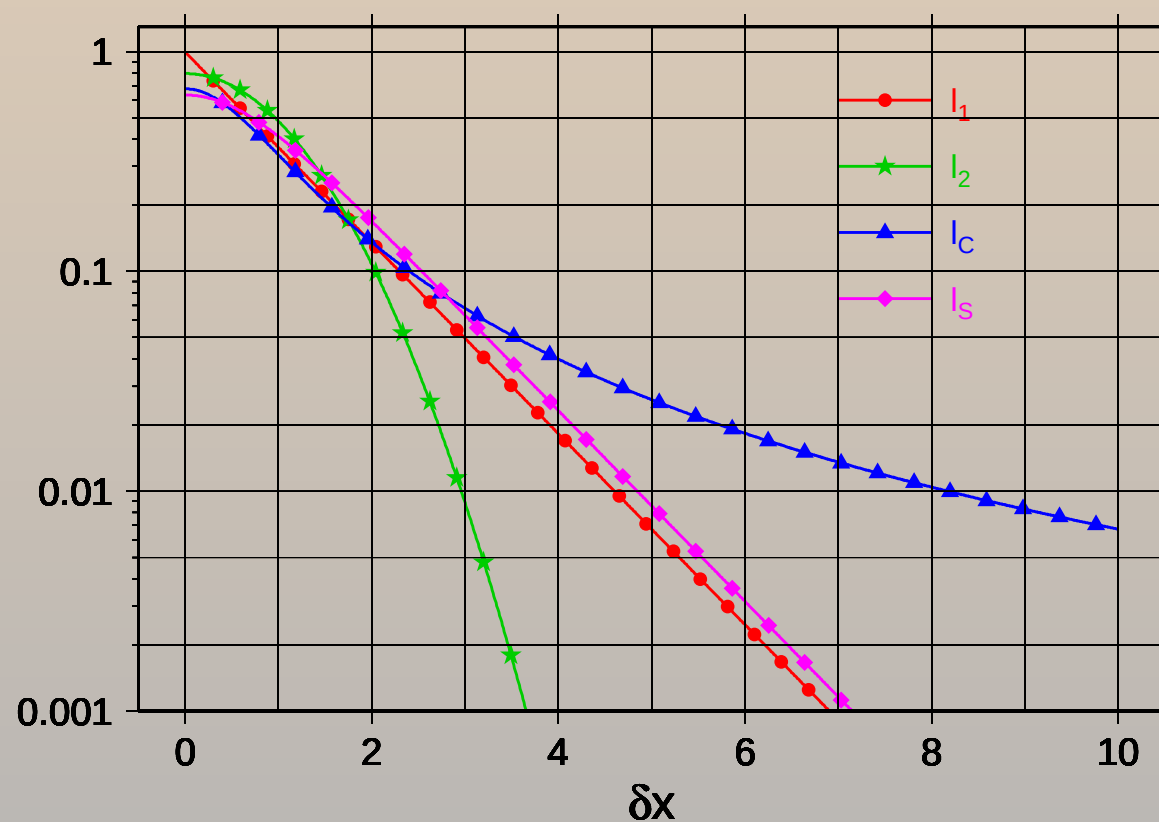
“krzepkość” norm (ang. robustnes)



Generowane rozkłady pdf

$$\sigma(x) = a \exp(-||\delta x||)$$

Probability density functions



Badanie rozkładu *a posteriori*

1. szukanie modelu najbardziej prawdopodobnego
 2. estymatory punktowe
 3. próbkowanie rozkładu *a posteriori*
(rozkłady warunkowe i brzegowe)
-

Model najbardziej prawdopodobny - optymalizacja

♦ szukanie modelu najbardziej prawdopodobnego

$$\mathbf{m}^{ml} : \quad \sigma(\mathbf{m}^{ml}) = \max$$

★ metody gradientowe

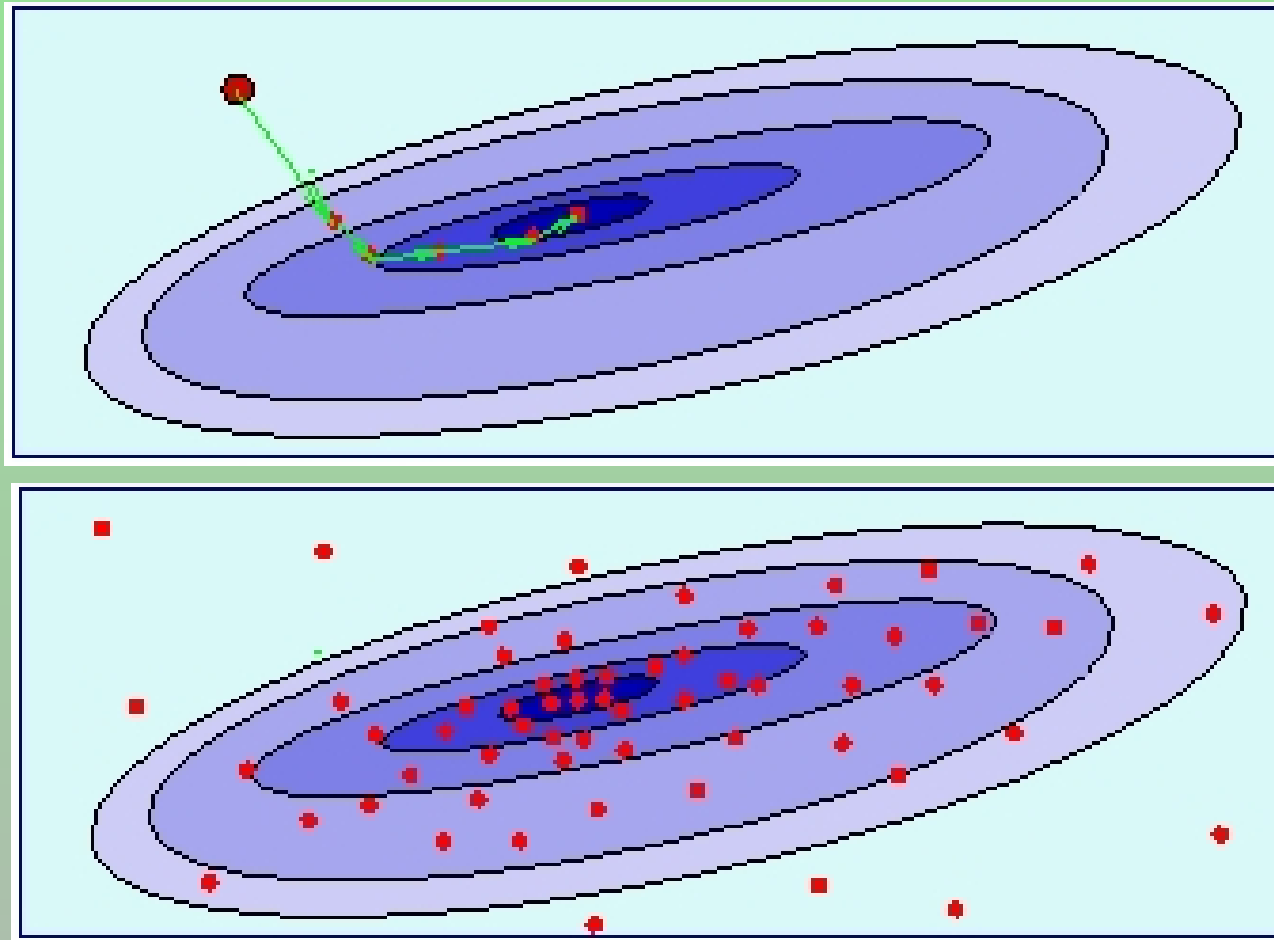
★ metody Monte Carlo

➡ Symulowane wyżarzanie

➡ Algorytm Genetyczny

technika równoważna podejściu optymalizacyjnemu

Optymalizacja gradientowa i Monte Carlo



Metoda: preconditioned steepest descent

1. $\mathbf{m}_0$ - dowolny, $\hat{\mathbf{S}}_0 \approx (\mathbf{I} + \mathbf{C}_M \mathbf{G}^t \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{G})^{-1}$
 2. $\gamma_n = \mathbf{C}_M \mathbf{G}^t \mathbf{C}_D^{-1} (\mathbf{G} \mathbf{m}_n - \mathbf{d}^{obs}) + (\mathbf{m}_n - \mathbf{m}^{apr})$
 3. $\phi_n = \hat{\mathbf{S}}_0 \gamma_n$
 4. $\mathbf{b}_n = \mathbf{G} \phi_n$
 5. $\mu_n = \frac{\gamma_n^t \mathbf{C}_M^{-1} \phi_n}{\phi_n^t \mathbf{C}_M^{-1} \phi_n + \mathbf{b}_n^t \mathbf{C}_D \mathbf{b}_n}$
 6. $\mathbf{m}_{n+1} = \mathbf{m}_n - \mu_n \phi_n$
-

Badanie rozkładu *a posteriori*

♦ punktowe estymatory (statystyczne)

- ★ model średni
- ★ model typu “mediana”
- ★ **macierz kowariancji**

♦ średni: $\mathbf{m}^{avr} = \int_M \mathbf{m} \sigma(\mathbf{m}) d\mathbf{m}$

♦ mediana: $\mathbf{m}^{med}$: $P(\mathbf{m} < \mathbf{m}^{med}) = P(\mathbf{m} > \mathbf{m}^{med})$

♦ macierz kowariancji:

$$C_{ij} = \int_M (m_i - m_i^{avr})(m_j - m_j^{avr}) \sigma(\mathbf{m}) d\mathbf{m}$$

Badanie rozkładu *a posteriori*

♦ **Próbkowanie rozkładu *a posteriori***

- ★ próbkowanie “geometryczne”

 - ➡ sieć regularna

 - ➡ sieć adaptacyjna (near neighborhood algorithm)

- ★ próbkowanie stochastyczne

- ★ rozkłady brzegowe i warunkowe

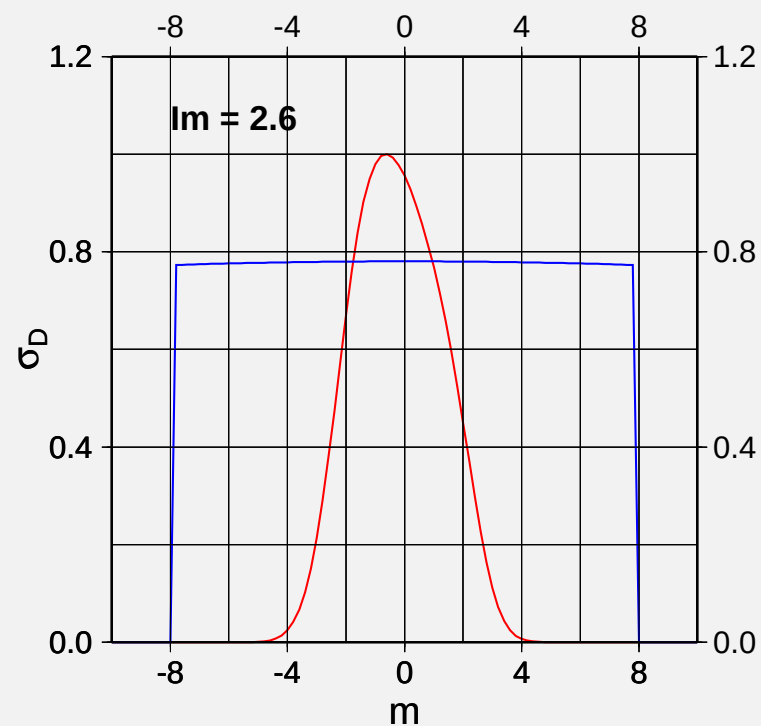
Próbkowanie geometryczne

$$\sigma(\mathbf{m}) \Rightarrow \sigma_{ijk\dots} = \sigma(m_i^1, m_j^2, m_k^3, \dots)$$

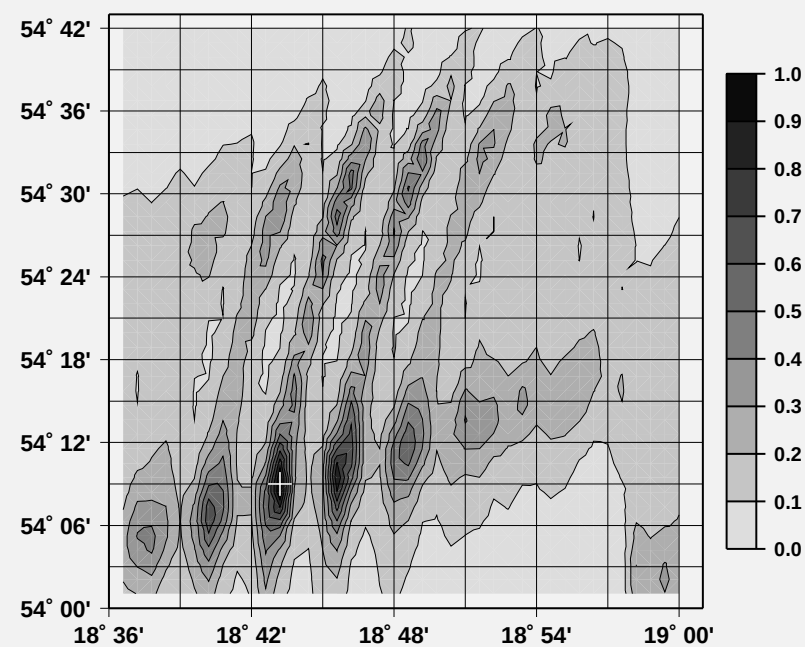
- ♦ **Metoda bardzo ogólna**
- ♦ **Tylko gdy mała liczba wymiarów $N < 6$**
- ♦ **Bardzo czasochłonne obliczenia**

Próbkowanie na sieci regularnej

$$N_m = 1$$



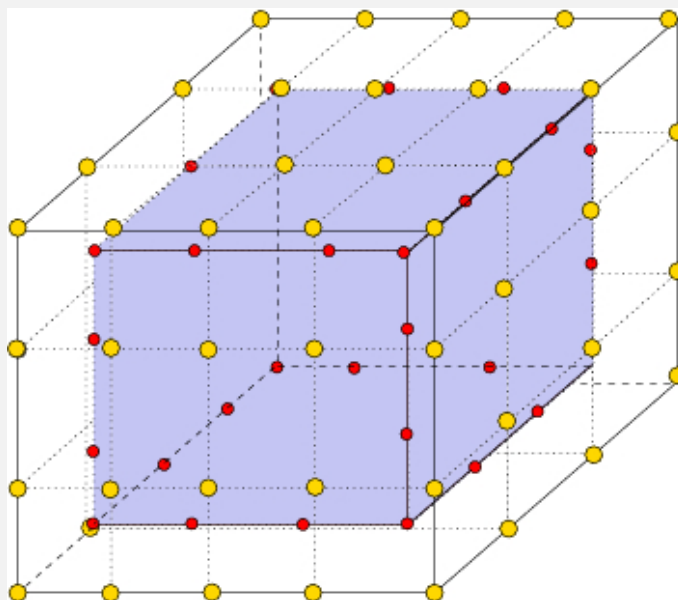
$$N_m = 2$$



Próbkowanie geometryczne w wielu wymiarach

Próbkowanie niejednorodne:

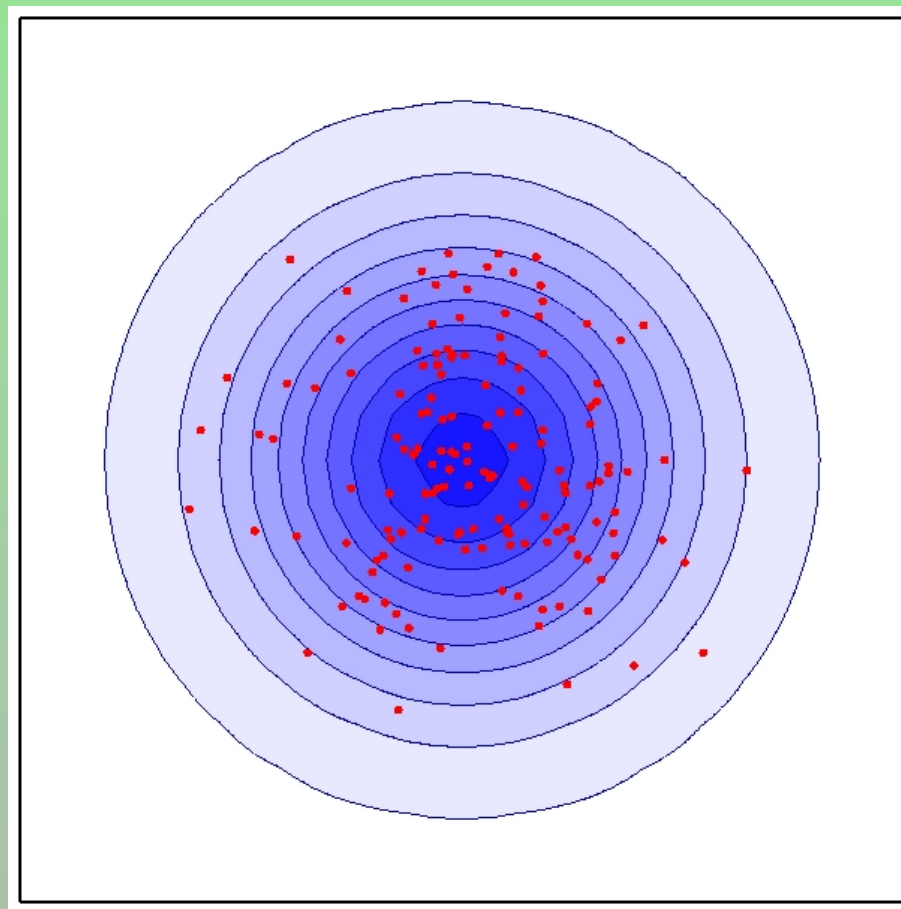
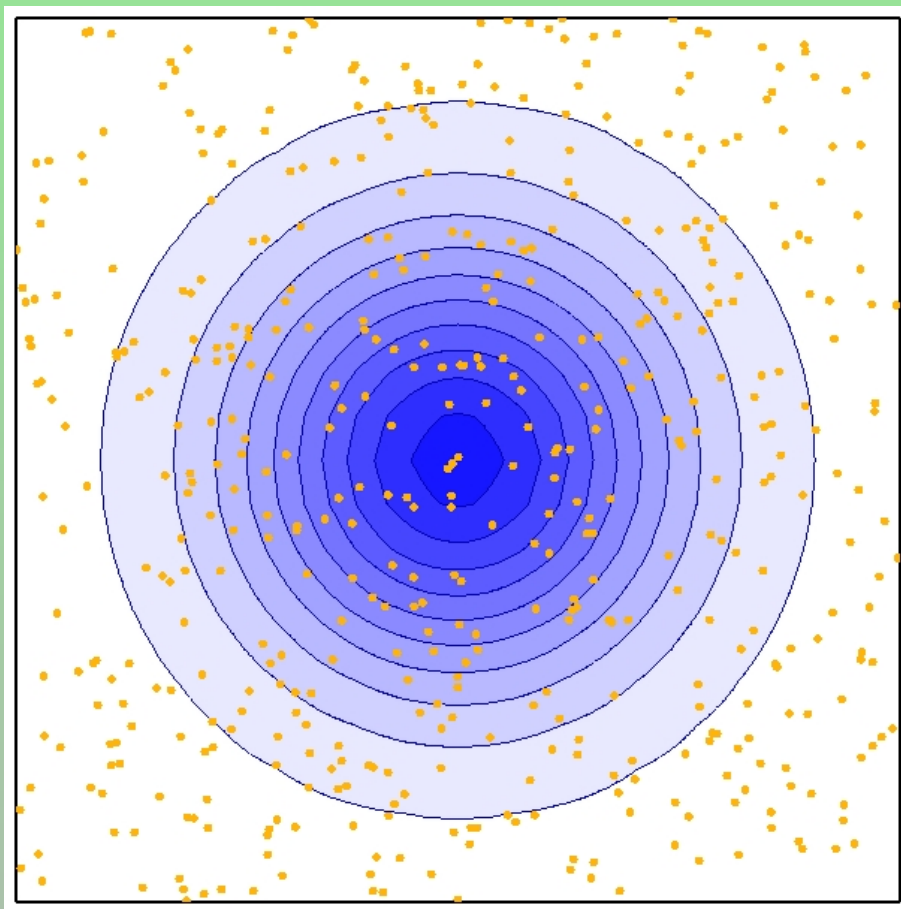
$$\frac{N_V}{N} = \left(\frac{p-2}{p} \right)^N \underset{p \gg 2}{\approx} e^{-2N/p} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$



Próbkowanie geometryczne w wielu wymiarach

N/p	10	100	1000
2	0.64	0.96	0.996
3	0.51	0.94	0.994
5	0.33	0.90	0.990
10	0.10	0.82	0.980
100	$2.0 \cdot 10^{-10}$	0.13	0.818
1000	$1.2 \cdot 10^{-97}$	$1.6 \cdot 10^{-11}$	0.135
10000	—	$1.8 \cdot 10^{-88}$	$2 \cdot 10^{-9}$

Próbkowanie Monte Carlo



Efektywność inwersji

$$\mathbf{m}^{apr} \Longrightarrow \mathbf{m}^{pos}$$

Ocena uzyskanych nowych informacji

$$I^{ef} = \int_M \sigma^{pos}(\mathbf{m}) \log \left(\frac{\sigma^{pos}(\mathbf{m})}{\sigma^{apr}(\mathbf{m})} \right) d\mathbf{m}$$

Analiza residuów

$$\mathbf{r}^{pos} = \mathbf{d}^{obs} - \mathbf{G}(\mathbf{m}^{pos})$$

$$\mathbf{r}^{apr} = \mathbf{d}^{obs} - \mathbf{G}(\mathbf{m}^{apr})$$

Podsumowanie teorii

- ♦ zagadnienie odwrotne - uogólniony pomiar
- ♦ trzy różne podejścia
 1. podejście algebraiczne
 2. podejście optymalizacyjne
 3. podejście probabilistyczne (Bayesowskie)
- ♦ rozwiązanie - **rozkład prawdopodobieństwa** a nie pojedynczy “optymalny model”
- ♦ konieczność efektywnego próbkowania wielowymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa