

Metody inwersyjne w geofizyce

(6)

Zagadnienie odwrotne (ogólnie)

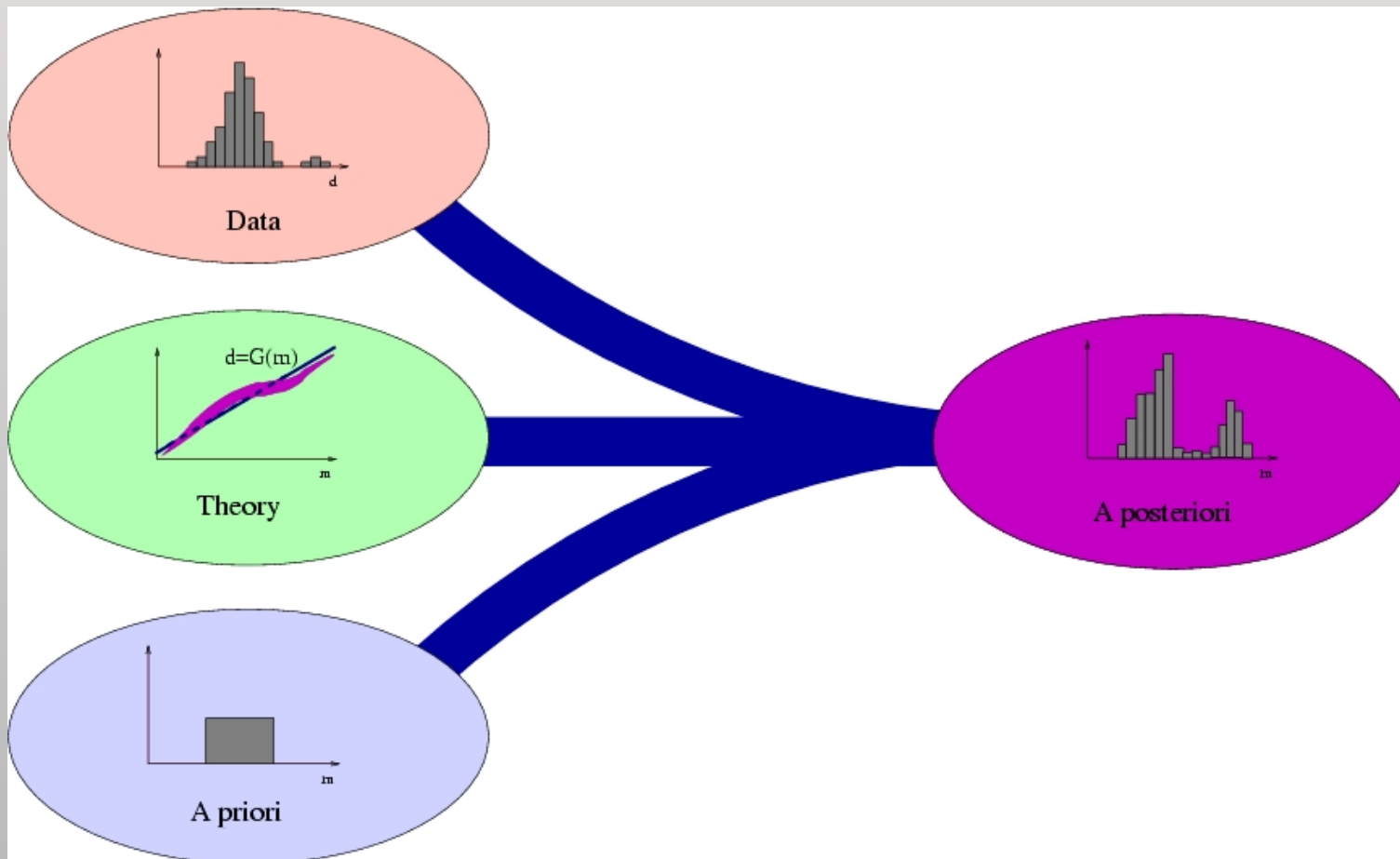
zagadnienie odwrotne



proces wnioskowania

Inwersja - łączenie informacji

(Wnioskowanie statystyczne)



Probabilistyczny opis informacji

posiadana
informacja $\Leftrightarrow$ rozkład
prawdopod.

Postulat:

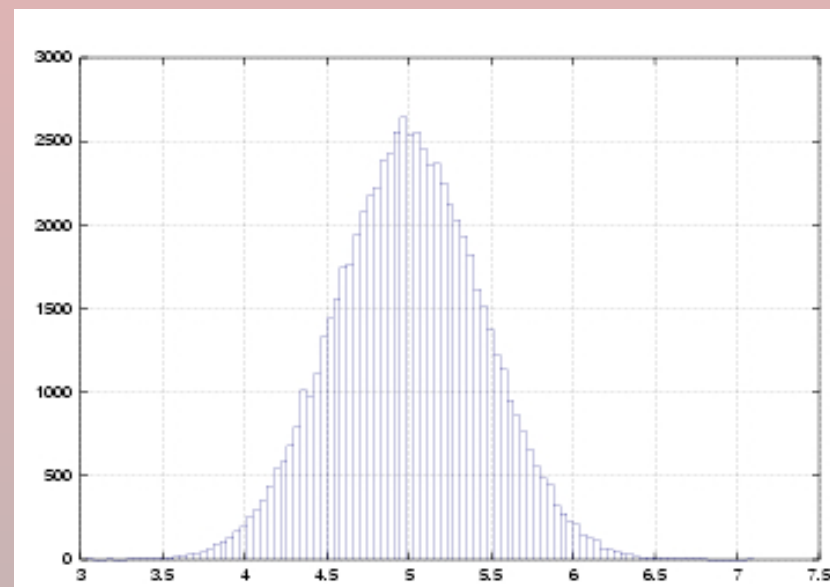
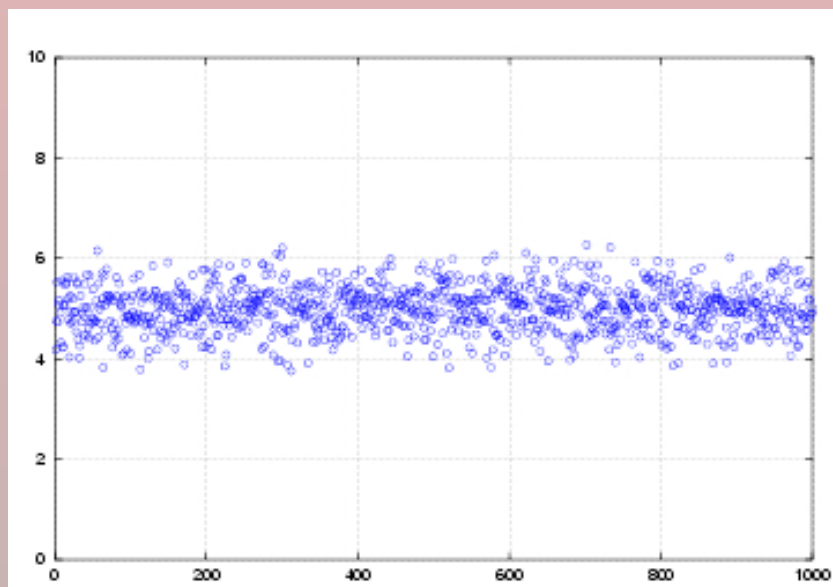
Każdą posiadaną informację możemy ilościowo opisać przy pomocy pewnego rozkładu prawdopodobieństwa:

Podstawy aksjomatyczne (Kołomogorow)

- ♦ funkcja: zdarzenie $\implies p \geq 0$
- ♦ prawdopodobieństwo zdarzenia pustego: $p = 0$
- ♦ prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia: $p = 1$
- ♦ jeżeli A jest sumą niezależnych zdarzeń A_i

$$P(A = \cup A_i) = \sum_i P(A_i)$$

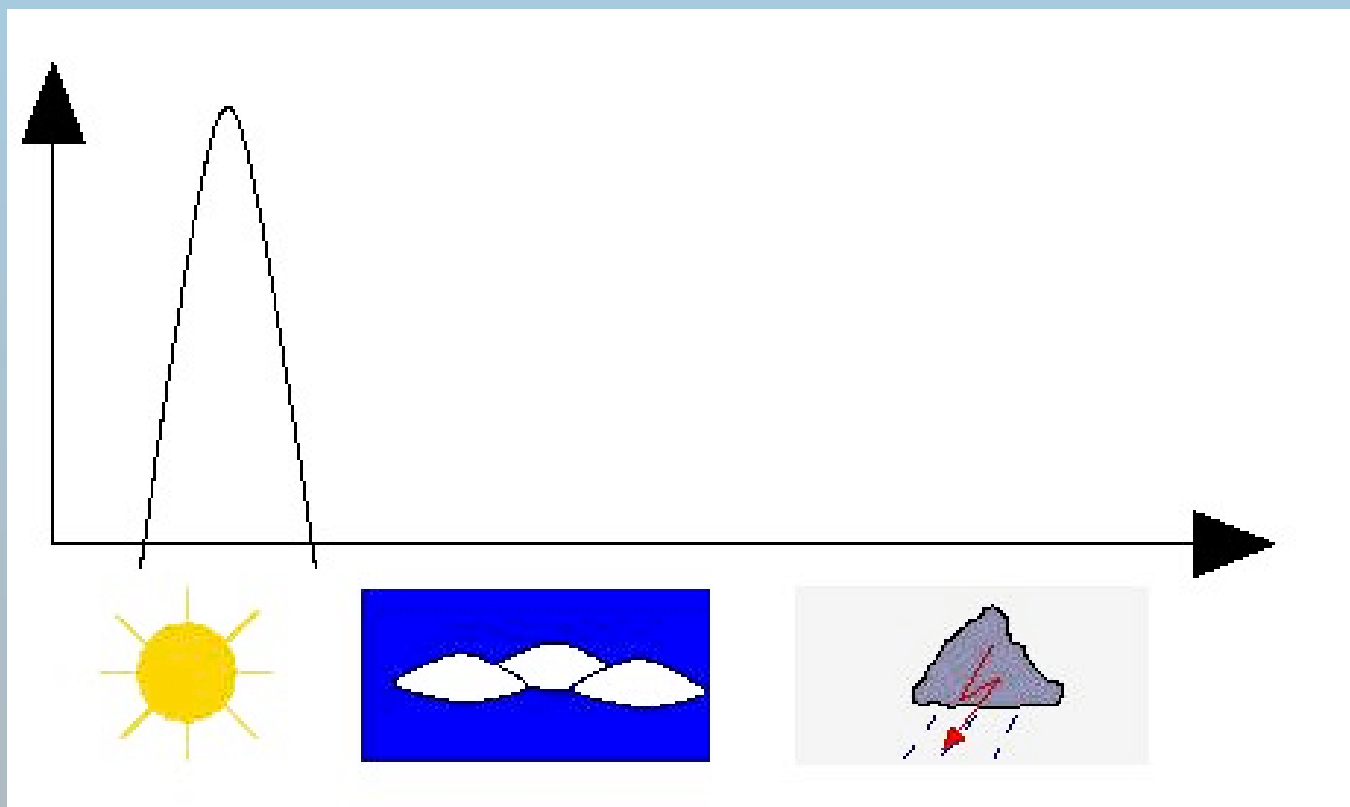
“Klasyczna” interpretacja



Interpretacja Bayesowska (a)



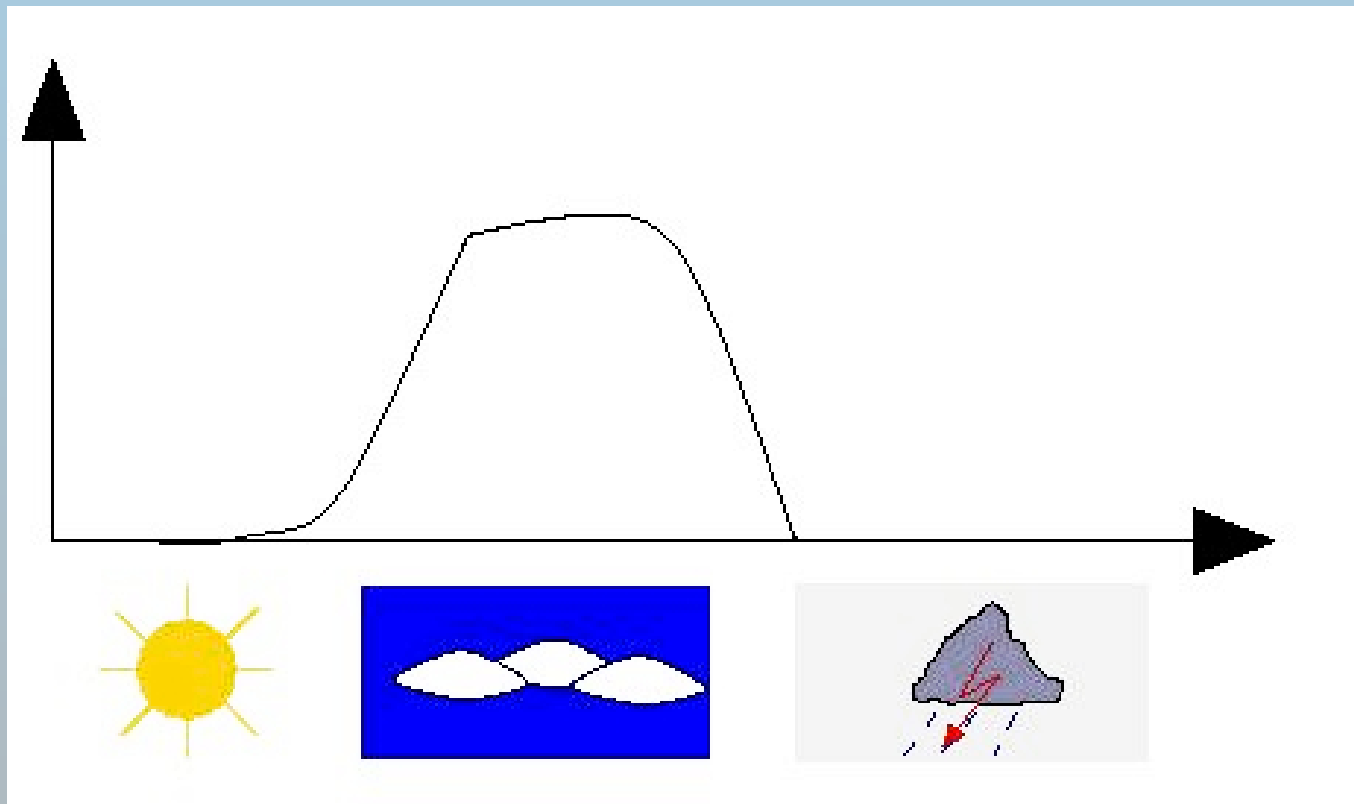
Interpretacja Bayesowska (a)



Interpretacja Bayesowska (b)



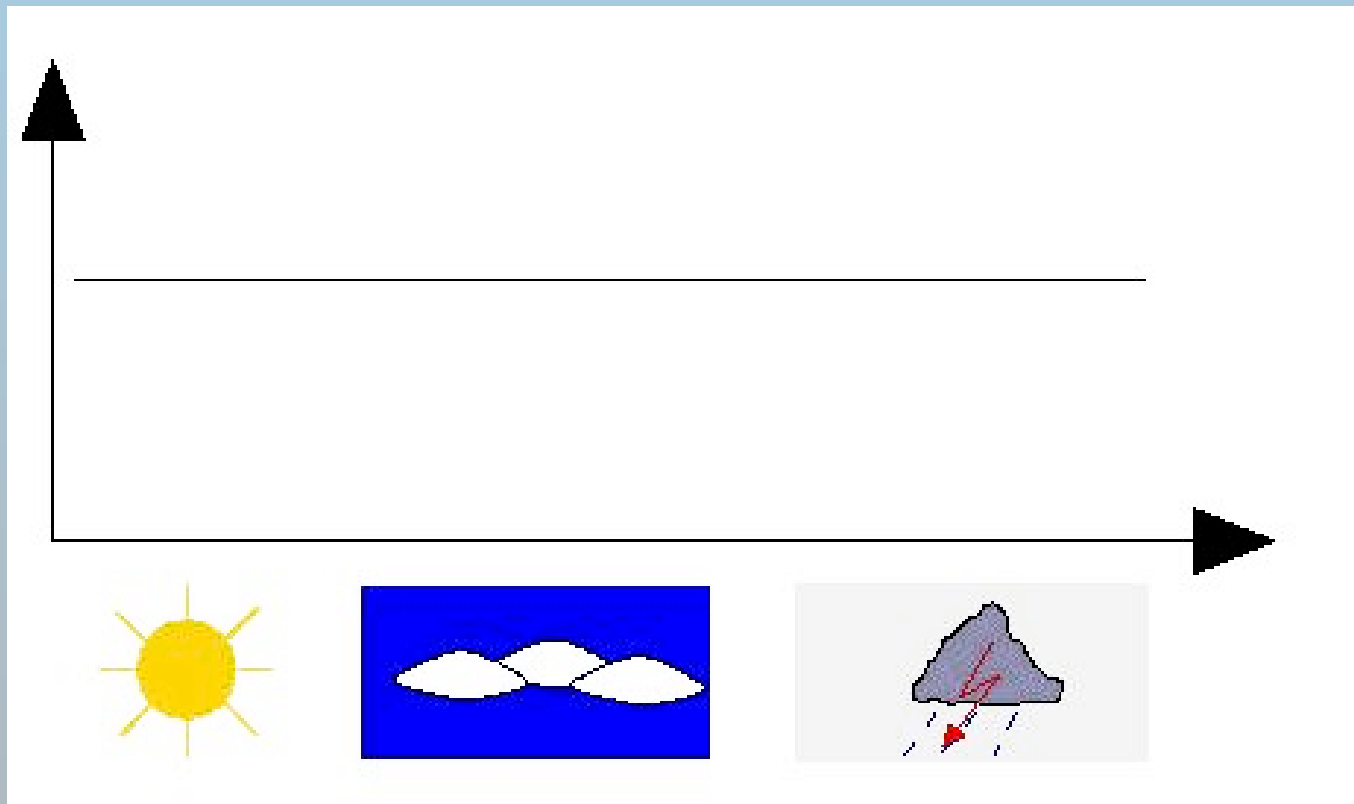
Interpretacja Bayesowska (b)



Interpretacja Bayesowska (b)



Interpretacja Bayesowska (b)



Podejście Tarantoli

Dwa rozkłady opisujące dwie różne informacje

1. $p(x)$

2. $q(x)$

$$\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p}(\mathbf{x}) \mathbf{q}(\mathbf{x})}{\mu(\mathbf{x})}$$

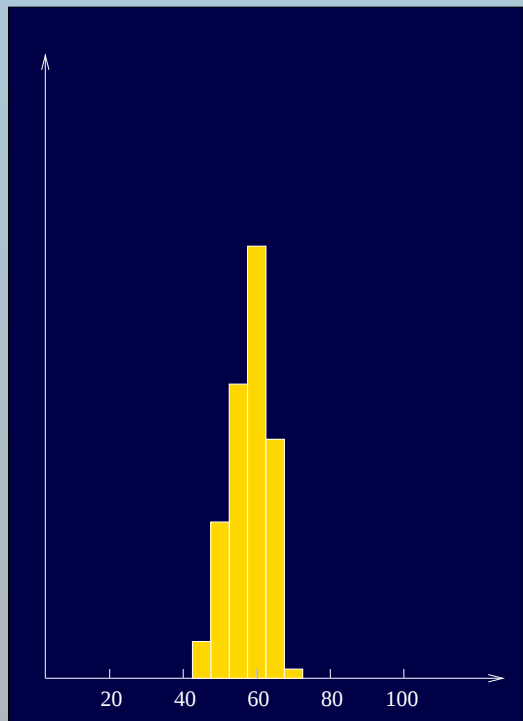
Opisuje **łączne** posiadane informacje

Przykład łączenia informacji (wnioskowania)

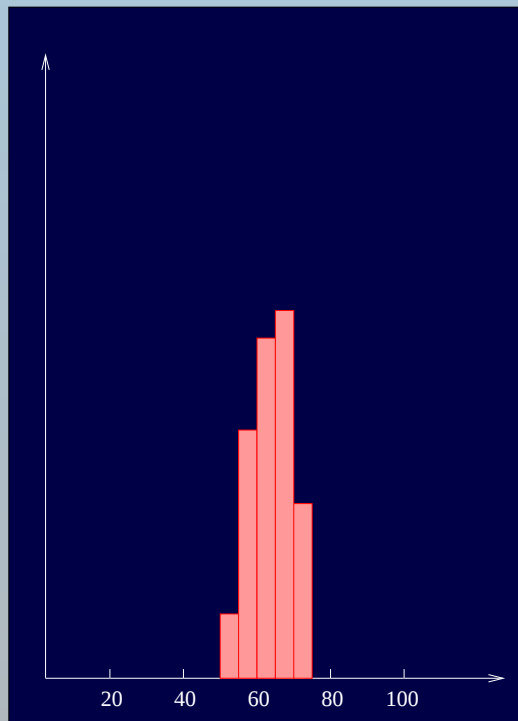


Przykład cd.

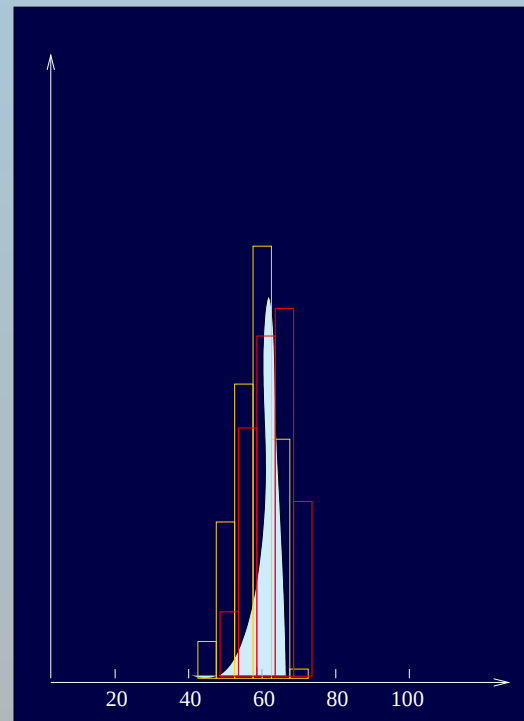
$$\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p}(\mathbf{x}) \mathbf{q}(\mathbf{x})}{\mu(\mathbf{x})}$$



$p(x)$



$q(x)$



$p \wedge q(x)$

Rozwiązanie problemu inwersyjnego

1. obserwacje: $p(\mathbf{d})$
 2. teoria : $q(\mathbf{m}, \mathbf{d})$
 3. *a priori* : $f(\mathbf{m}, \mathbf{d})$
-

$$(p \wedge q)(\cdot) = \frac{p(\cdot) q(\cdot)}{\mu(\cdot)}$$

Rozkład *A posteriori pdf* na $M \times D$

Trzy kroki:

1. Uogólnienie wszystkich rozkładów na przestrzeń $M \times D$
2. Utworzenie uogólnionej funkcji podobieństwa:

$$\mathcal{L}(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = (p \wedge q)(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = \frac{p(\mathbf{m}, \mathbf{d}) q(\mathbf{m}, \mathbf{d})}{\mu(\mathbf{m}, \mathbf{d})}$$

3. utworzenie rozkładu *A posteriori*:

$$\sigma(m, d) \approx (\mathcal{L} \wedge f)(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = \frac{\mathcal{L}(\mathbf{m}, \mathbf{d}) f(\mathbf{m}, \mathbf{d})}{\mu(\mathbf{m}, \mathbf{d})}$$

A posteriori pdf

$$\sigma(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = \frac{p(\mathbf{m}, \mathbf{d}) q(\mathbf{m}, \mathbf{d}) f(\mathbf{m}, \mathbf{d})}{\mu^2(\mathbf{m}, \mathbf{d})}$$

Brzegowe rozkłady *A posteriori*

$$\sigma_m(m) = \int_D \sigma(m, d) dD$$

$$\sigma_d(d) = \int_M \sigma(m, d) dM$$

A posteriori pdf

$$\sigma_m(m) = f(m) \cdot L(m, d^{obs})$$

$$L(\mathbf{m}, \mathbf{d}^{obs}) = \int_D p(\mathbf{d}, \mathbf{d}^{obs}) \frac{q(\mathbf{m}, \mathbf{d})}{\mu(\mathbf{m}, \mathbf{d})} d\mathbf{d}$$

Przykład - dokładna teoria

$$q(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = \delta(\mathbf{d} - \mathbf{G}(\mathbf{m}))\mu_M(\mathbf{m})$$

wtedy

$$\sigma(\mathbf{m}) = f(\mathbf{m}) \frac{p(\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{G}(\mathbf{m}))}{\mu_D(\mathbf{d})}$$

funkcja podobieństwa opisuje niepewność wyznaczenia $\mathbf{m}$ z względu na obecność błędów pomiarowych

Przykład - dokładne pomiary

$$p(\mathbf{d}, \mathbf{d}^{obs}) = \delta(\mathbf{d} - \mathbf{d}^{obs})$$

wtedy

$$\sigma(\mathbf{m}) = f(\mathbf{m}) \frac{q(\mathbf{m}, \mathbf{d}^{obs})}{\mu(\mathbf{m}, \mathbf{d}^{obs})}$$

funkcja podobieństwa opisuje niepewność wyznaczenia $\mathbf{m}$ z względu na obecność błędów modelowania

Przykład - brak informacji teoretycznych

rola informacji *a priori*

$$q(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = \mu(\mathbf{m}, \mathbf{d})$$

wtedy

$$L(\mathbf{m}) = \int_D p(\mathbf{d}, \mathbf{d}^{obs}) \frac{q(\mathbf{m}, \mathbf{d})}{\mu(\mathbf{m}, \mathbf{d})} d\mathbf{d} = \int_D p(\mathbf{d}) d\mathbf{d} = \text{const.}$$

$$\sigma(\mathbf{m}) = f(\mathbf{m})$$

Przykład - brak danych pomiarowych

rola informacji *a priori*

$$p(\mathbf{d}) = \mu_D(\mathbf{d})$$

wtedy

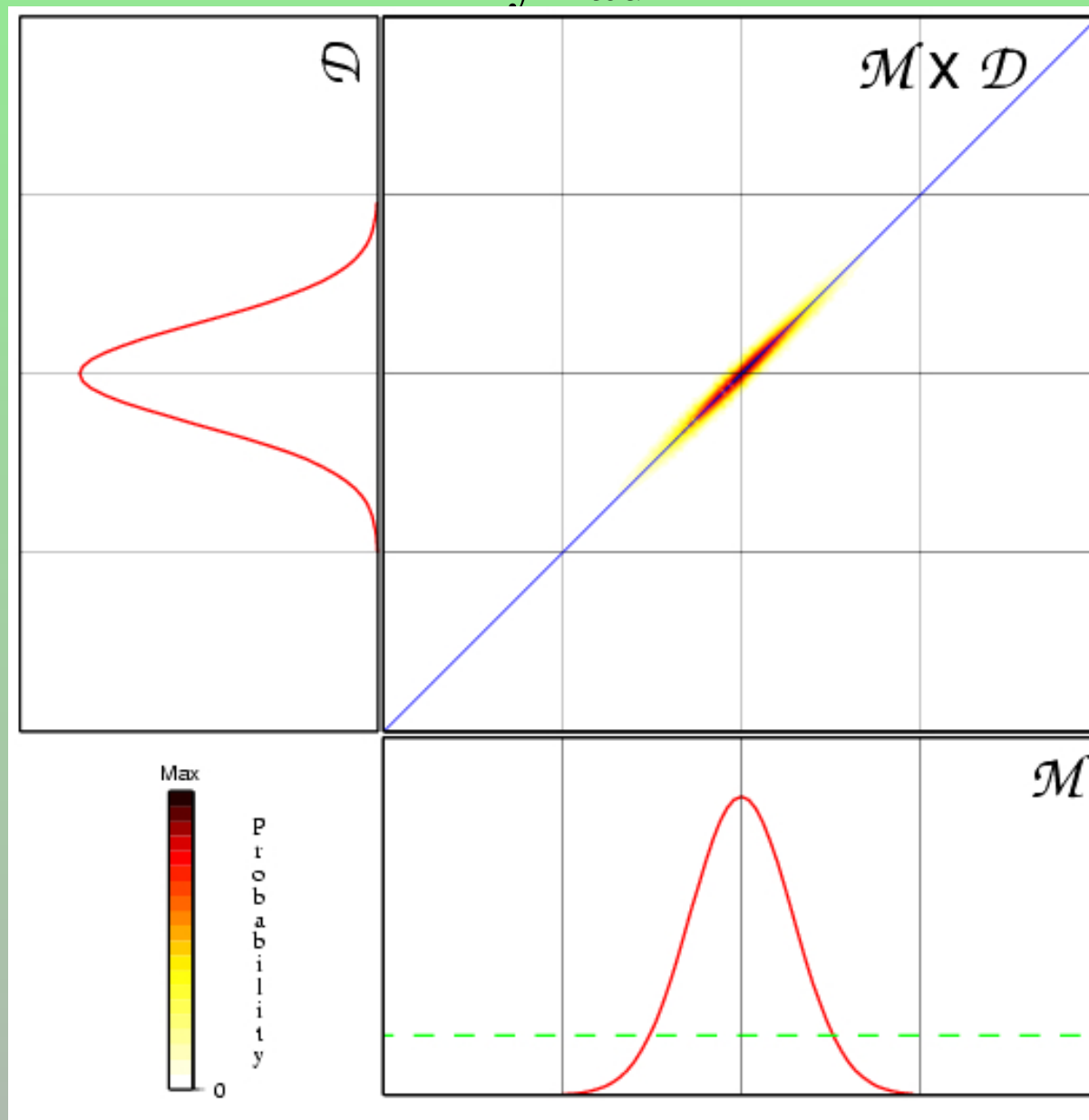
$$L(\mathbf{m}) = \int_D p(\mathbf{d}) / \mu_D(\mathbf{d}) \frac{q(\mathbf{m}, \mathbf{d})}{\mu_M(\mathbf{m})} d\mathbf{d}$$

gdy

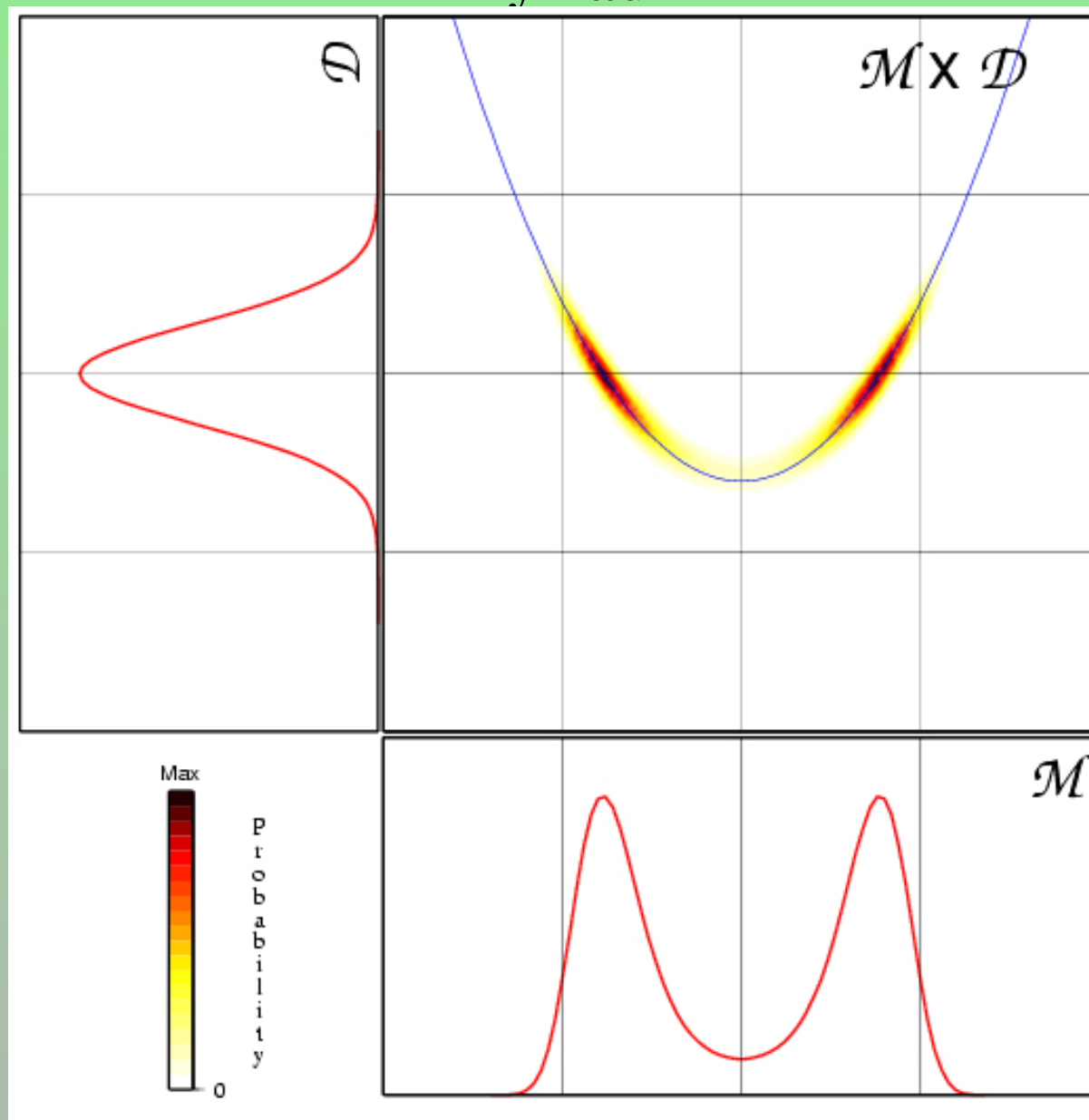
$$q(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = \mu_M(\mathbf{m}) \rho(\mathbf{d} - G(\mathbf{m}))$$

$$\sigma(\mathbf{m}) = f(\mathbf{m})$$

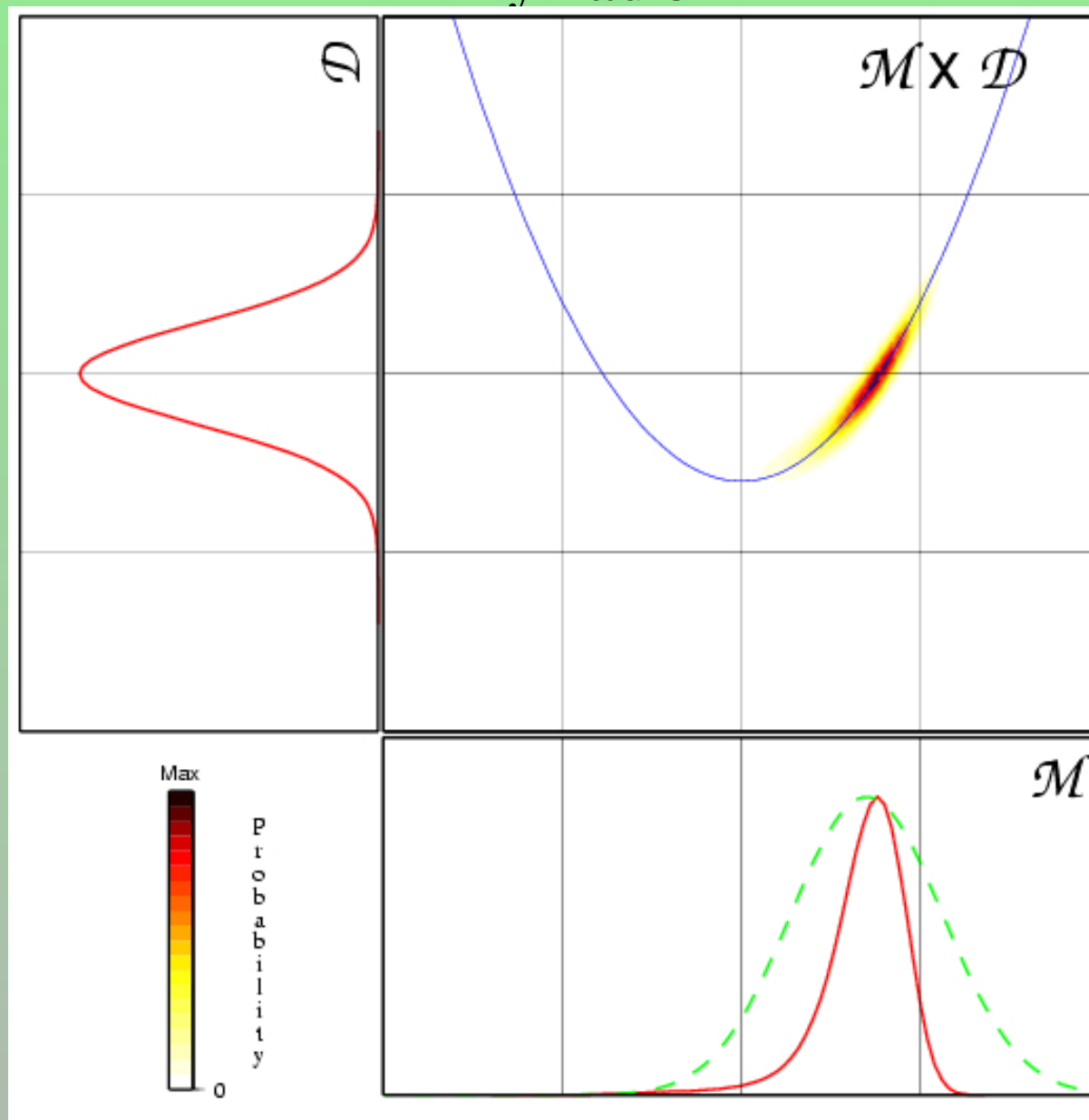
Przykład 1



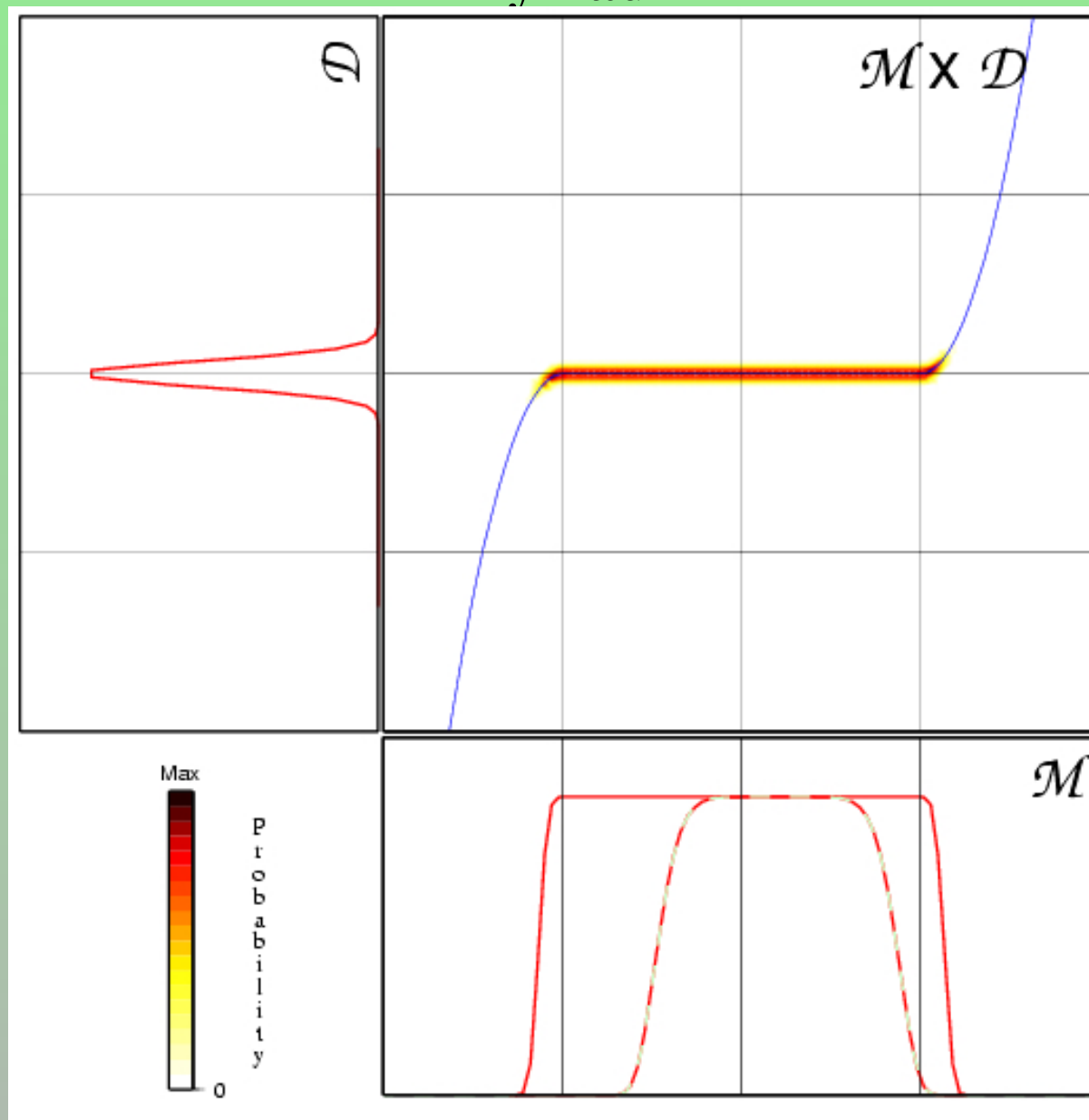
Przykład 2



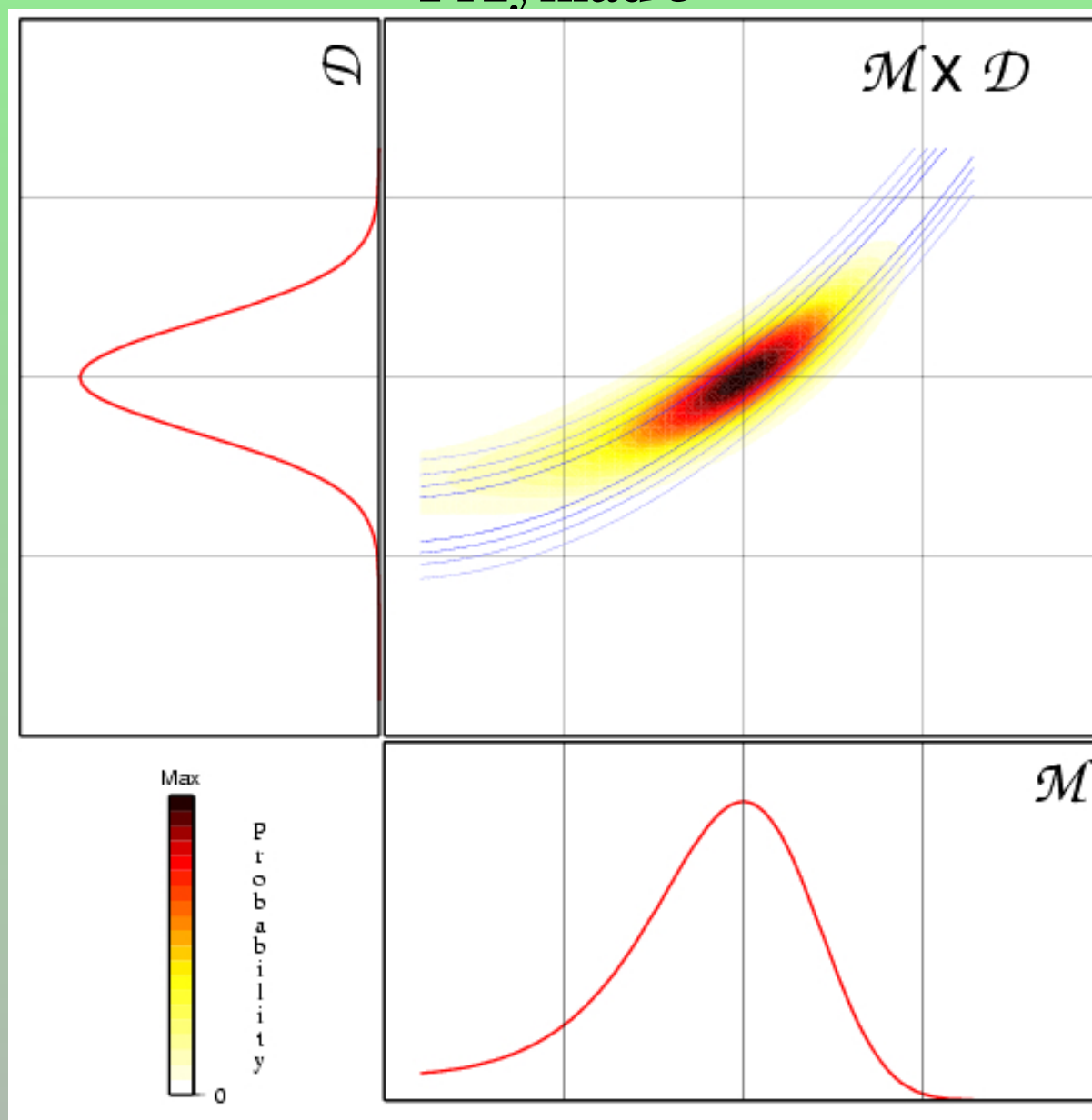
Przykład 3



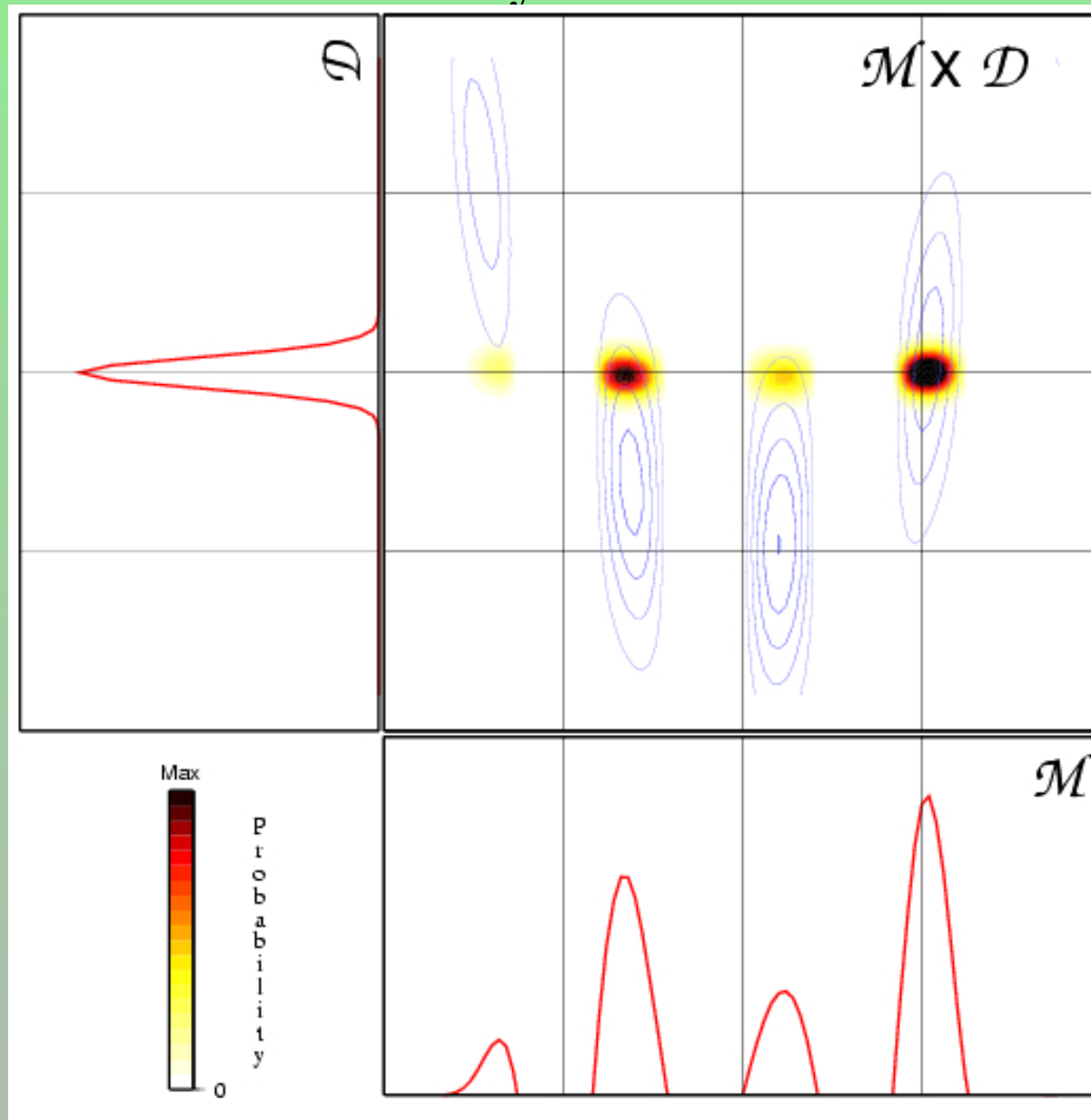
Przykład 4



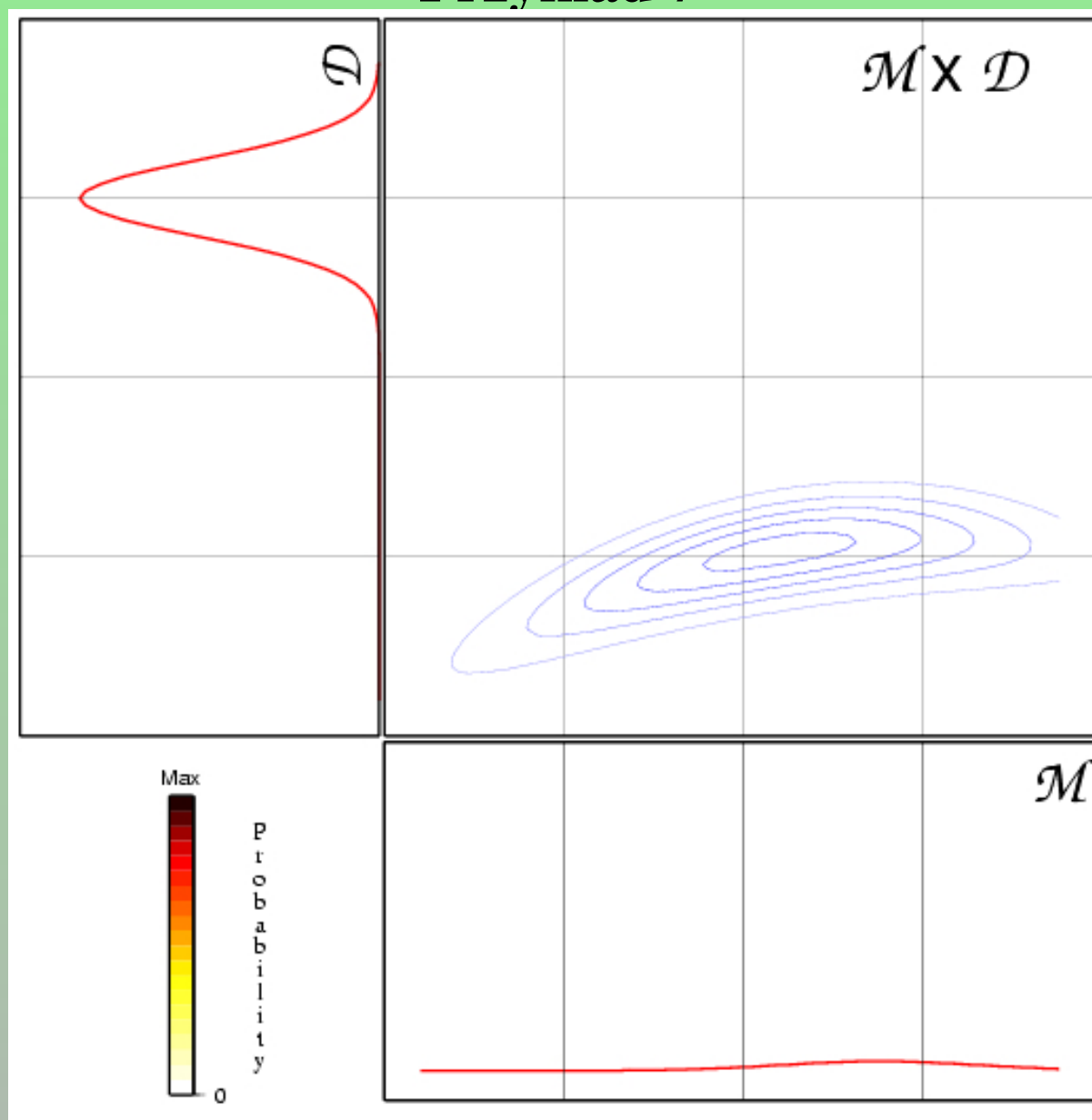
Przykład 5



Przykład 6



Przykład 7



Przykład 8

