

Metody inwersyjne w geofizyce

(5)

Zagadnienie odwrotne (najczęściej)

zagadnienie odwrotne



pomiar pośredni

(estymacja parametrów)

Zagadnienie odwrotne (ogólnie)

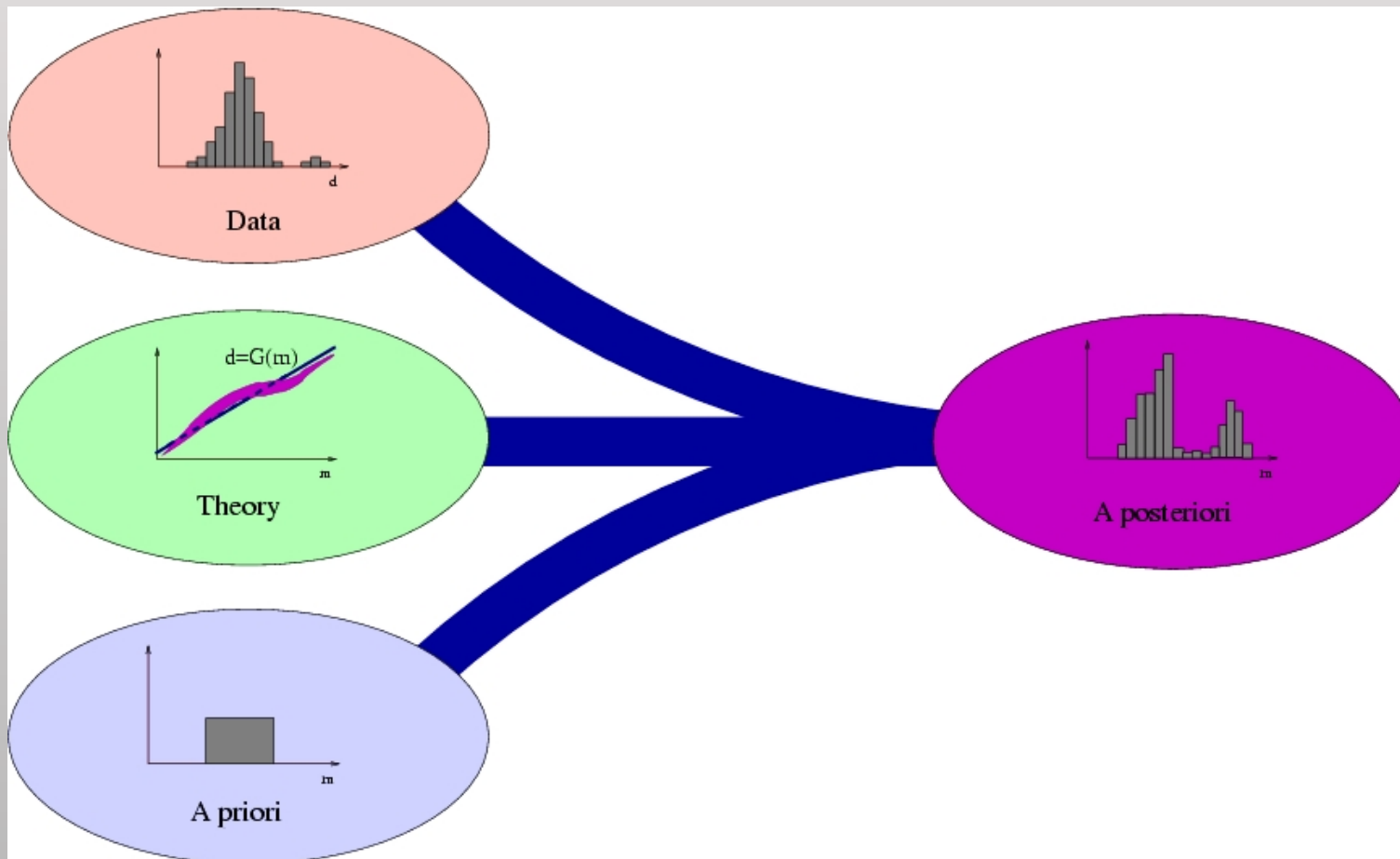
zagadnienie odwrotne



proces wnioskowania

Inwersja - łączenie informacji

(Wnioskowanie statystyczne)



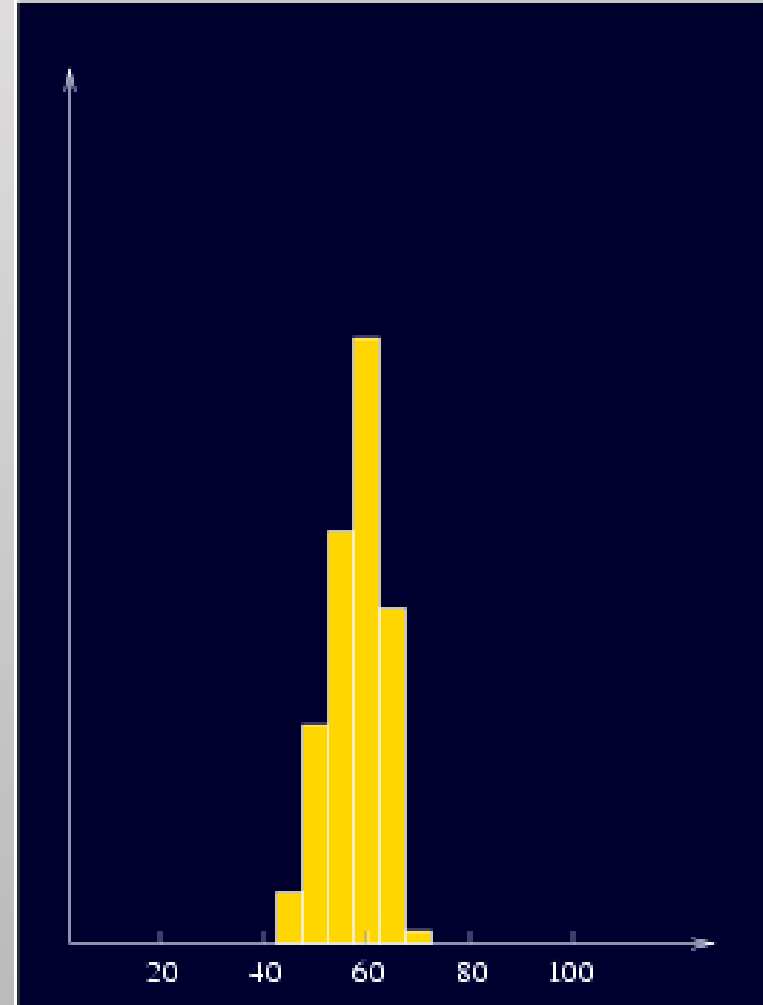
Probabilistyczny opis informacji

posiadana
informacja $\Leftrightarrow$ rozkład
prawdopod.

Postulat:

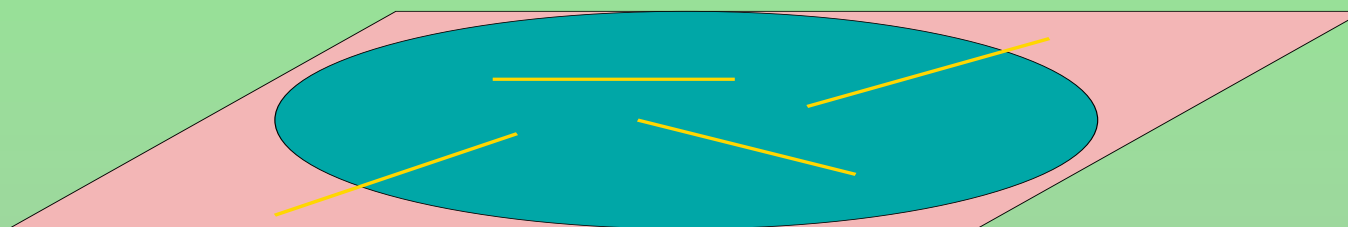
Każdą posiadaną informację możemy ilościowo opisać przy pomocy pewnego rozkładu prawdopodobieństwa:

Przykład wnioskowania rozwiązania problemu odwrotnego

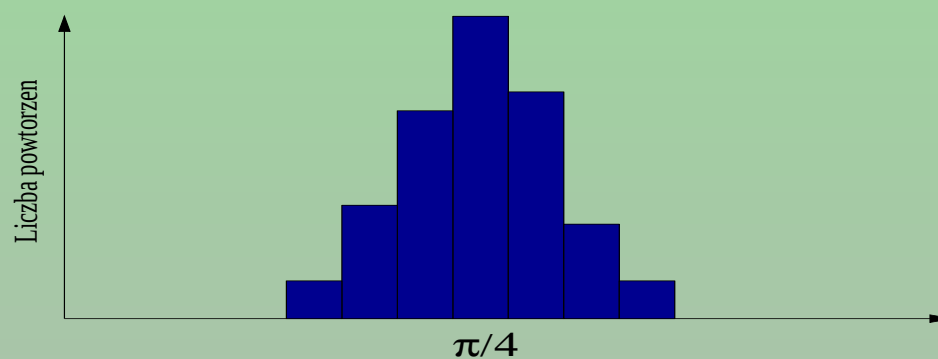


Prawdopodobieństwo - podstawy

powierzchnia koła

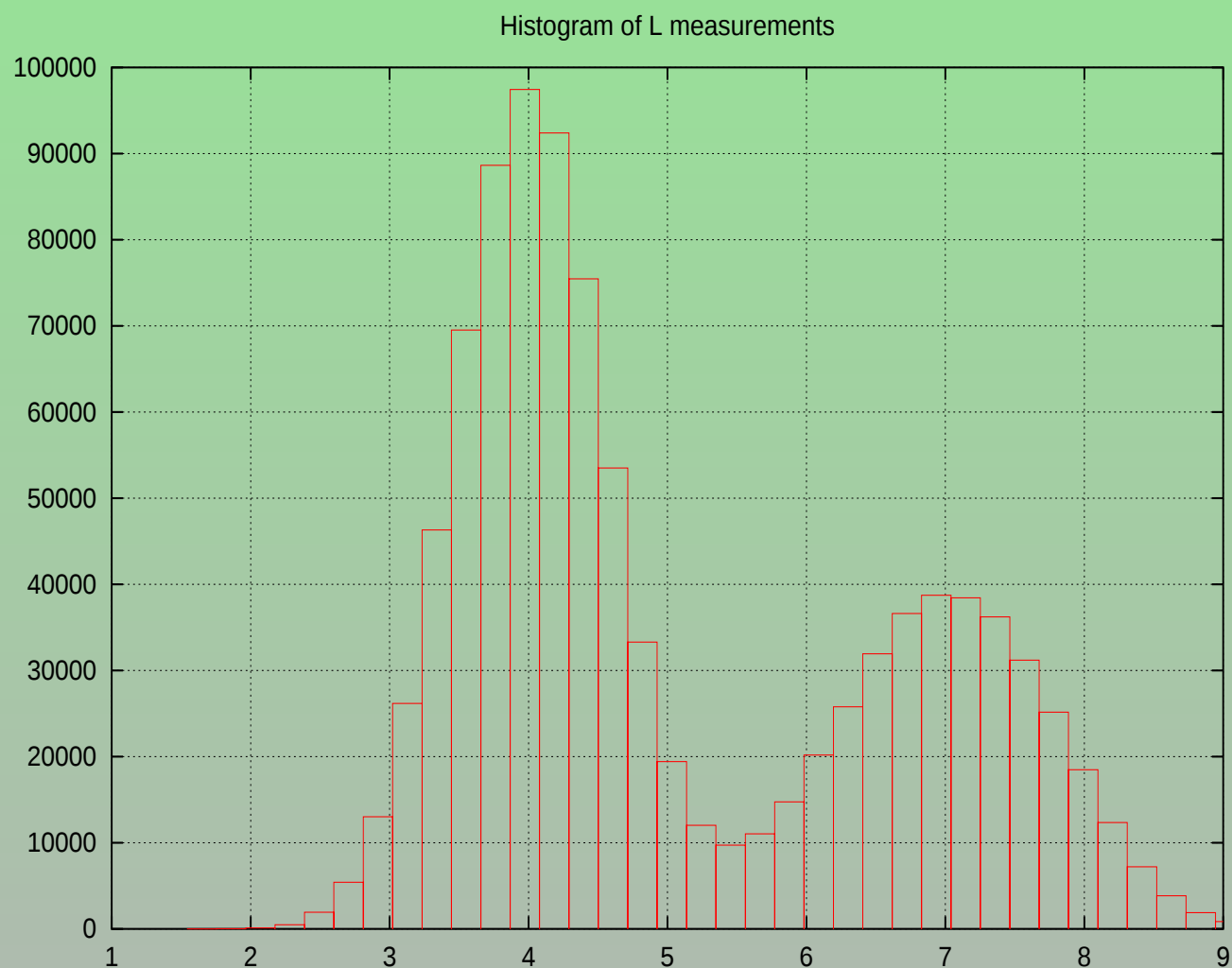


$$p = N_p/N$$



$$P(A) = \frac{N_i}{N_{\text{tot}}} \left[= \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4} \right]$$

Prawdopodobieństwo - procesy losowe

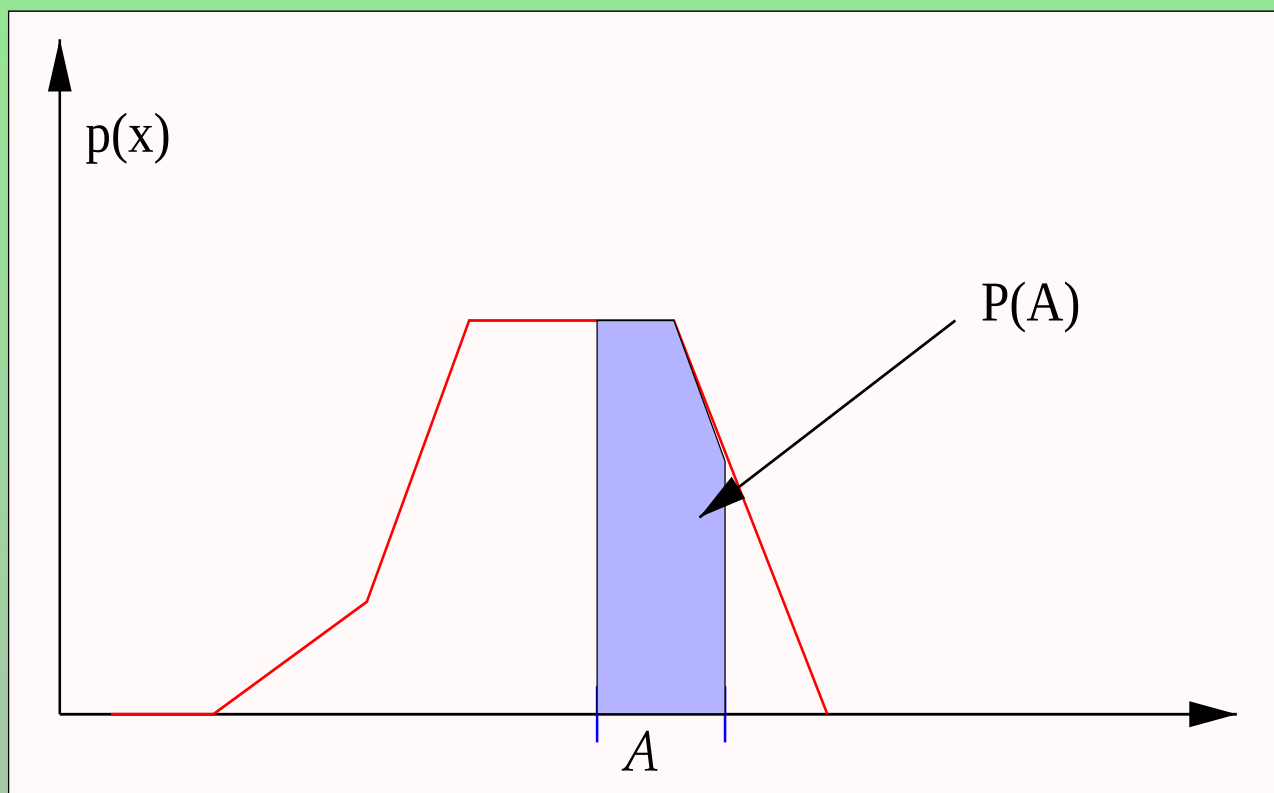


Podstawy aksjomatyczne (Kołomogorow)

- ♦ funkcja: zdarzenie $\implies p \geq 0$
- ♦ prawdopodobieństwo zdarzenia pustego: $p = 0$
- ♦ prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia: $p = 1$
- ♦ jeżeli jest sumą niezależnych zdarzeń

$$P(A = \cup A_i) = \sum_i P(A_i)$$

Gęstość prawdopodobieństwa



$$P(A) = \int_A p(x) dx$$

Opis gęstości prawdopodobieństwa (pdf)

ang.: probability density function

♦ Normalizacja

$$\int_X p(x) dx = 1$$

♦ Wartość średnia

$$\bar{x} = \langle x \rangle = \int_X x p(x) dx$$

♦ Dyspersja

$$\sigma^2 = \langle (x - \bar{x})^2 \rangle = \int_X (x - \bar{x})^2 p(x) dx$$

♦ Momenty wyższego rzędu

Rozkłady wielowymiarowe

♦ Normalizacja

$$\int_X \int_Y p(x, y) dx dy = 1$$

♦ Wartość średnia/rozkłady brzegowe

$$\bar{x} = \int_{XY} x p(x, y) dx dy$$

$$p_x(x) = \int_Y p(x, y) dy$$

$$\bar{x} = \int_X x p_x(x) dx$$

Rozkłady wielowymiarowe

macierz kowariancji

$$\sigma_{xy} = \int_{XY} (x - \bar{x})(y - \bar{y})p(x, y)dx dy$$

$$\sigma_x^2 = \int_{XY} (x - \bar{x})(x - \bar{x})p(x, y)dx dy$$

$$\sigma_y^2 = \int_{XY} (y - \bar{y})(y - \bar{y})p(x, y)dx dy$$

$$cov = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

Rozkłady brzegowe i warunkowe

$$p(x, y)$$

$$♦ p_x(x) = \int_Y p(x, y) dy$$

$$♦ p_y(y) = \int_X p(x, y) dx$$

$$♦ p_{x|y}(x|y) = p(x, y) / p_y(y)$$

$$♦ p_{y|x}(y|x) = p(x, y) / p_x(x)$$

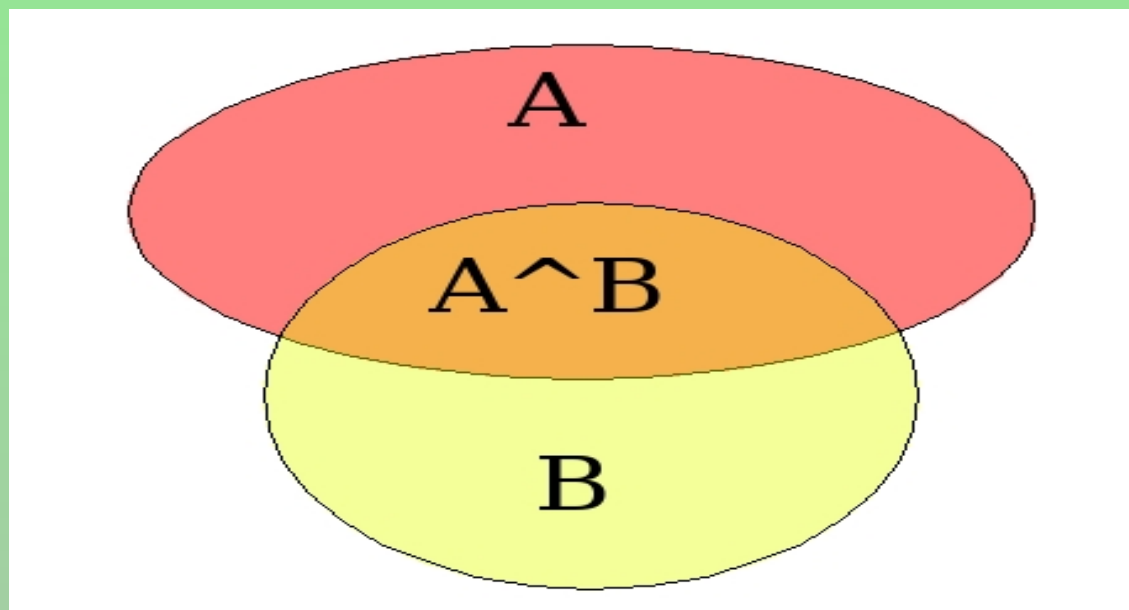
Rozkłady brzegowe i warunkowe

$$p(x, y) = p_{x|y}(x|y)p_y(y)$$

$$p(x, y) = p_{y|x}(y|x)p_x(x)$$

$$p_{x|y}(x|y)p_y(y) = p_{y|x}(y|x)p_x(x)$$

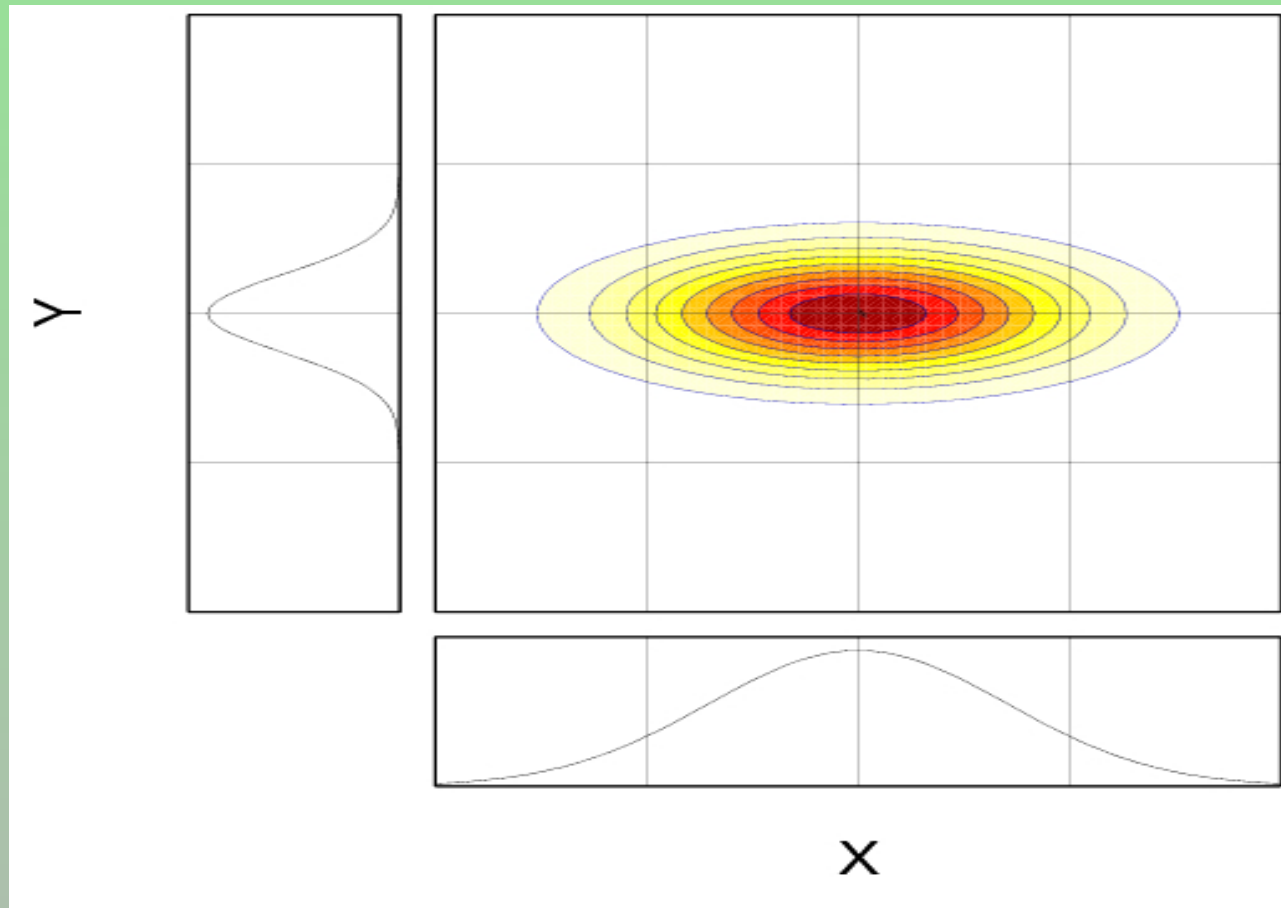
Rozkłady brzegowe i warunkowe



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

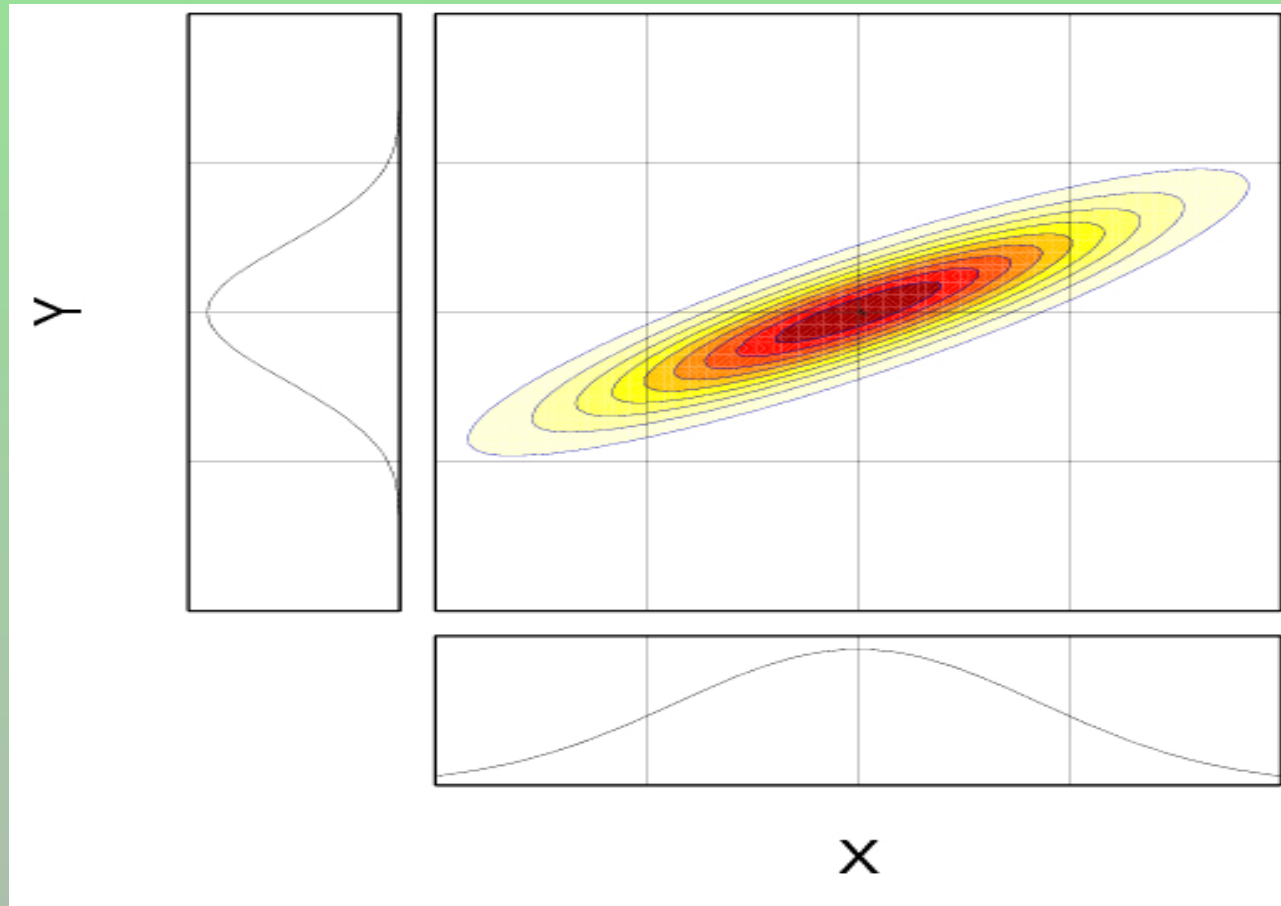
Przykład A

$$p(x, y) = p_x(x)p_y(y)$$

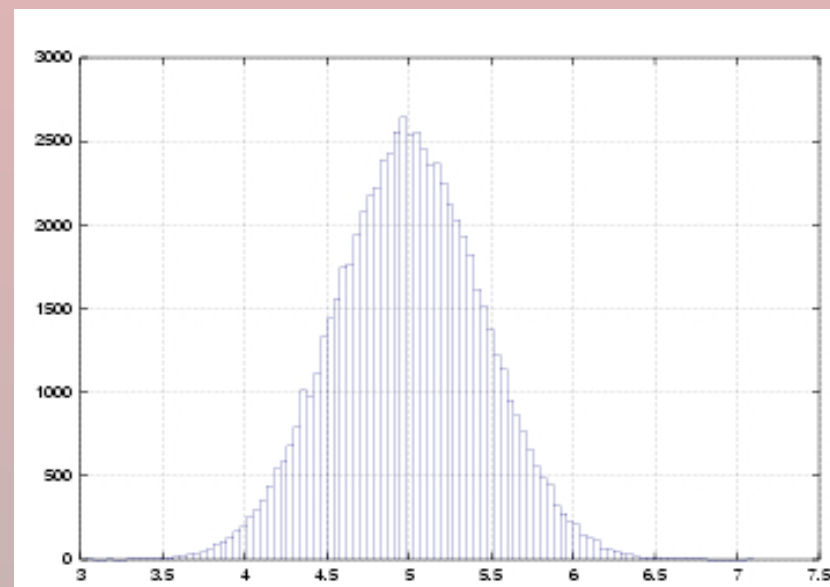
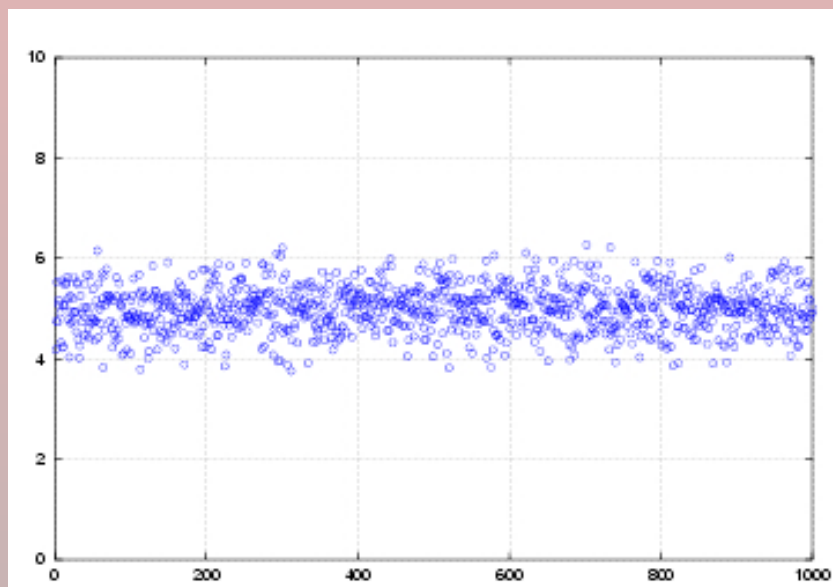


Przykład B

$$p(x, y) \neq p_x(x)p_y(y)$$



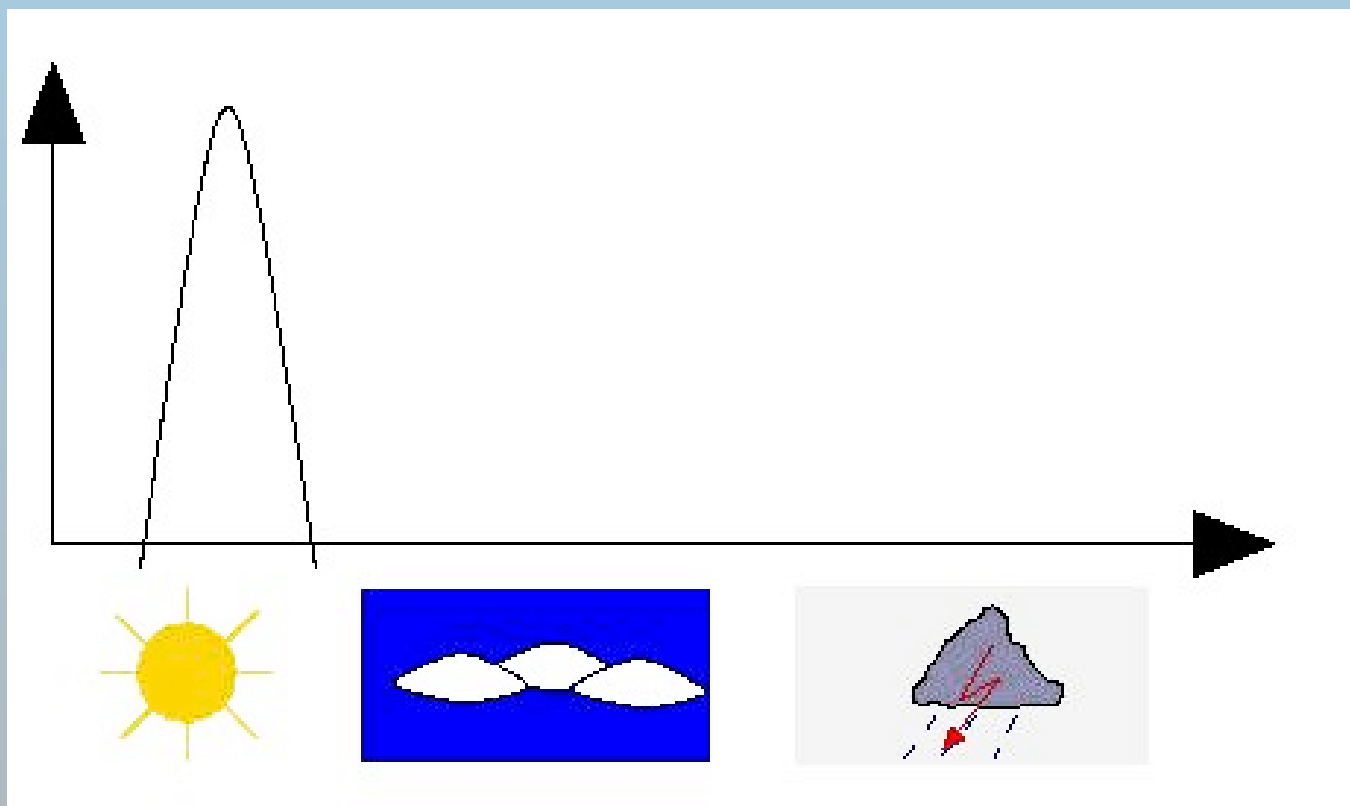
“Klasyczna” interpretacja



Interpretacja Bayesowska (a)



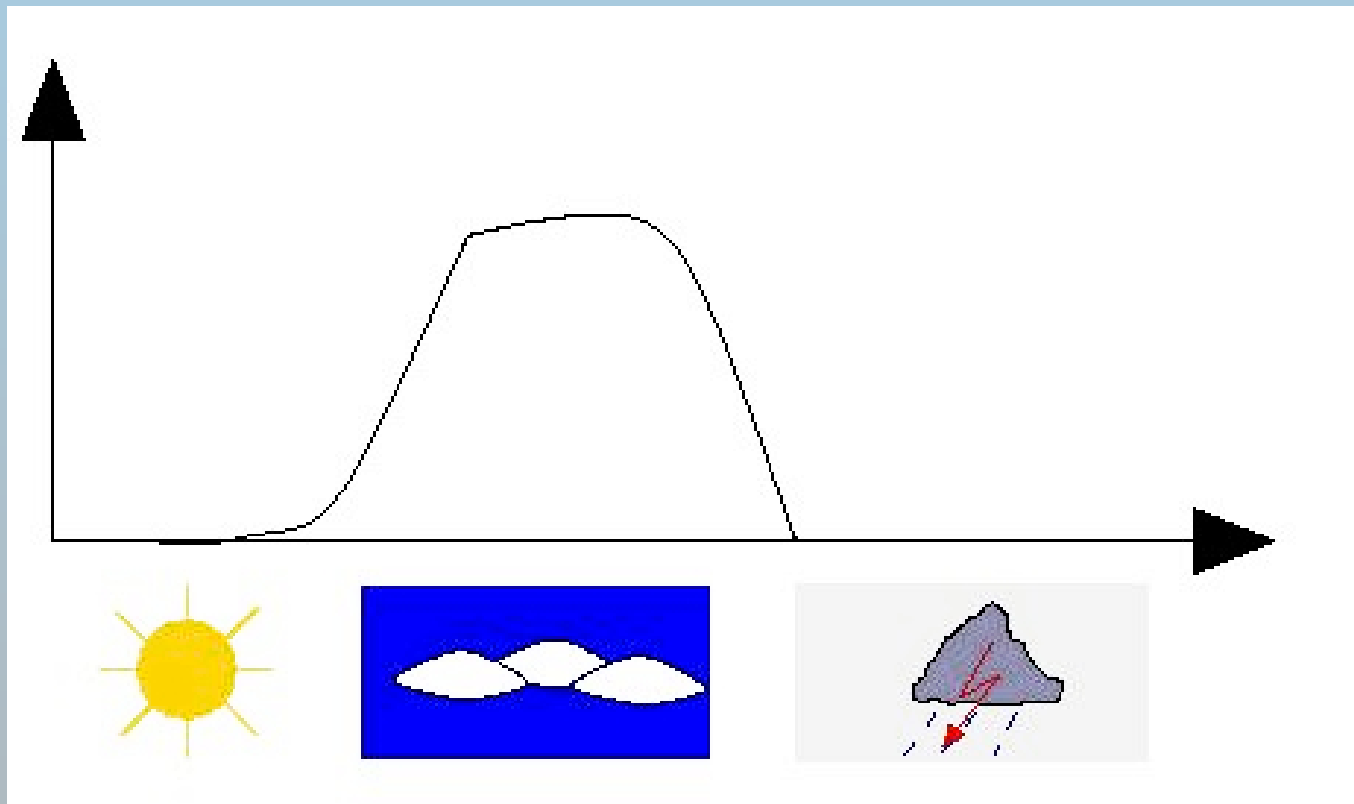
Interpretacja Bayesowska (a)



Interpretacja Bayesowska (b)



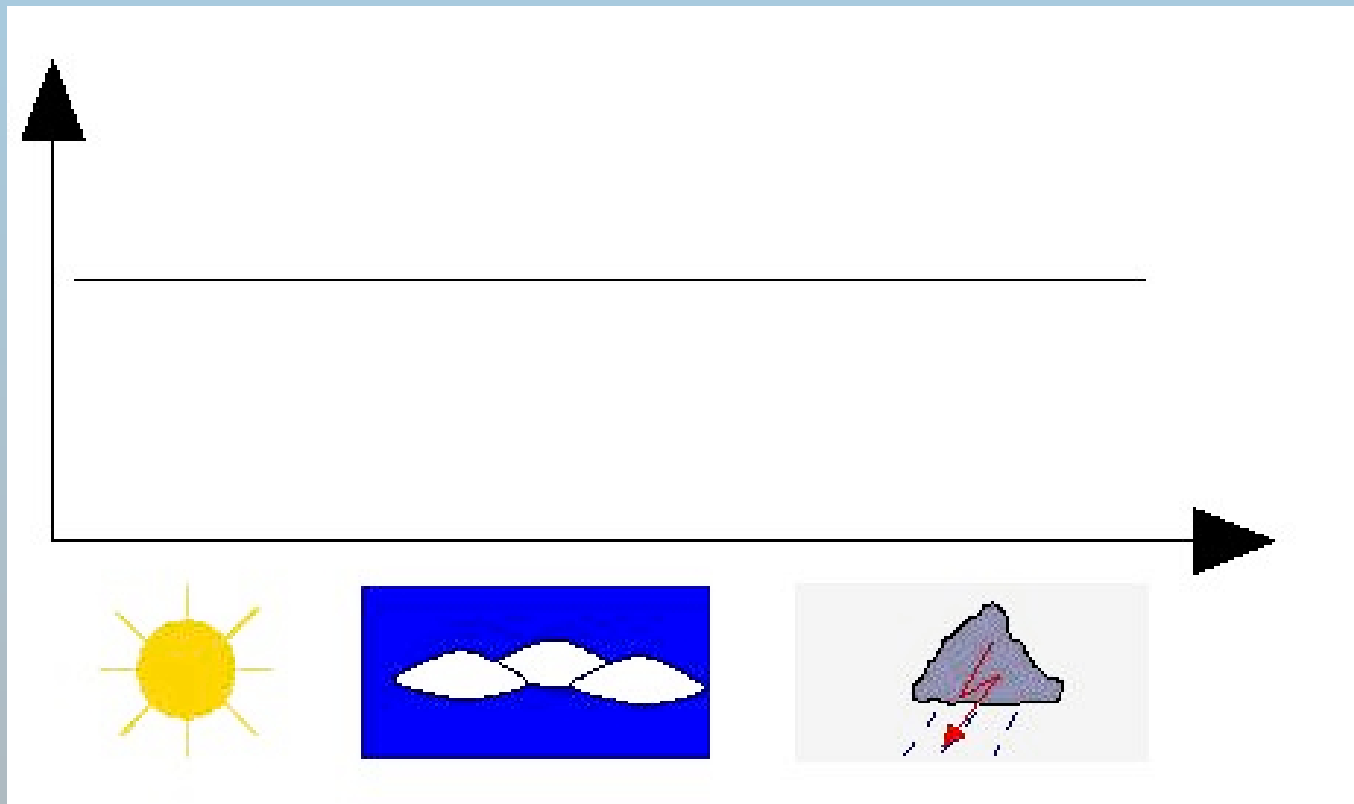
Interpretacja Bayesowska (b)



Interpretacja Bayesowska (b)



Interpretacja Bayesowska (b)



Rozkłady brzegowe i warunkowe

$$p(\mathbf{m}, \mathbf{d})$$

$$\blacklozenge p_{\mathbf{m}}(\mathbf{m}) = \int_D p(\mathbf{m}, \mathbf{d}) d\mathbf{d}$$

$$\blacklozenge p_{\mathbf{d}}(\mathbf{d}) = \int_M p(\mathbf{m}, \mathbf{d}) d\mathbf{m}$$

$$\blacklozenge p_{\mathbf{m}|\mathbf{d}}(\mathbf{m}|\mathbf{d}) = p(\mathbf{m}, \mathbf{d})/p_{\mathbf{d}}(\mathbf{d})$$

$$\blacklozenge p_{\mathbf{d}|\mathbf{m}}(\mathbf{d}|\mathbf{m}) = p(\mathbf{m}, \mathbf{d})/p_{\mathbf{m}}(\mathbf{m})$$

Rozkłady brzegowe i warunkowe

$$p(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = p_{\mathbf{m}|\mathbf{d}}(\mathbf{m}|\mathbf{d})p_{\mathbf{d}}(\mathbf{d})$$

$$p(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = p_{\mathbf{d}|\mathbf{m}}(\mathbf{d}|\mathbf{m})p_{\mathbf{m}}(\mathbf{m})$$

$$p_{\mathbf{m}|\mathbf{d}}(\mathbf{m}|\mathbf{d})p_{\mathbf{d}}(\mathbf{d}) = p_{\mathbf{d}|\mathbf{m}}(\mathbf{d}|\mathbf{m})p_{\mathbf{m}}(\mathbf{m})$$

Twierdzenie Bayesa

$$p_{\mathbf{m}|\mathbf{d}}(\mathbf{m}|\mathbf{d}) = \frac{p_{\mathbf{d}|\mathbf{m}}(\mathbf{d}|\mathbf{m})p_{\mathbf{m}}(\mathbf{m})}{p_{\mathbf{d}}(\mathbf{d})}$$

Twierdzenie Bayesa -interpretacja

$$\mathbf{d} \implies \mathbf{d}^{obs}$$

$$p_{\mathbf{m}|\mathbf{d}}(\mathbf{m}|\mathbf{d}^{obs}) = \frac{p_{\mathbf{d}|\mathbf{m}}(\mathbf{d}^{obs}|\mathbf{m})p_{\mathbf{m}}(\mathbf{m})}{p_{\mathbf{d}}(\mathbf{d}^{obs})}$$

Rozkład *a posteriori*

$$p_{post}(\mathbf{m}|\mathbf{d}^{obs}) \sim p(\mathbf{d}^{obs}|\mathbf{m}) p_{apr}(\mathbf{m})$$