

Metody inwersyjne w geofizyce

(4)

Zagadnienia odwrotne - uogólnione pomiary

$$\mathbf{m} = ? \implies \mathbf{d}^{obs} \implies \mathbf{d}^{obs} \Rightarrow \mathbf{m}$$

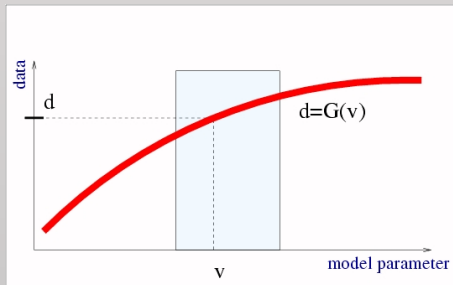
$$||\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{d}^{th}(\mathbf{m})|| + \lambda ||\mathbf{m}^{ml} - \mathbf{m}^{apr}|| = \min$$

$$\mathbf{m}^{true} = \mathbf{m}^{ml} + \epsilon_{\mathbf{m}} \quad \epsilon_{\mathbf{m}} = ???$$

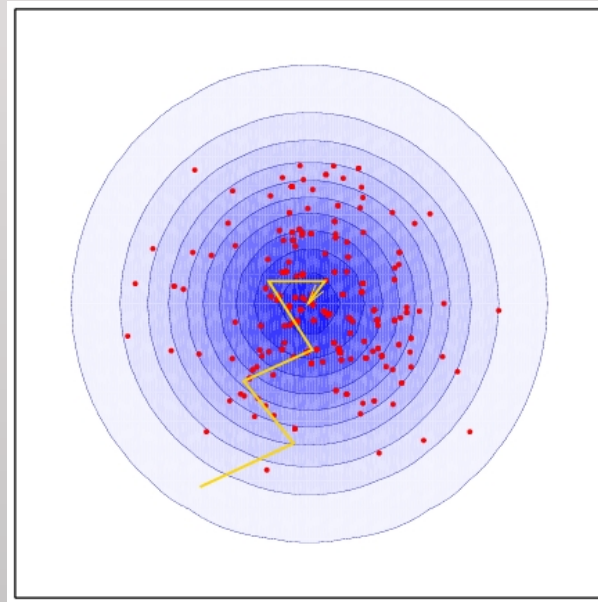
Stosowane Algorytmy

Metoda	Zalety	Ograniczenia
Algebraiczna (LSQR) $\mathbf{m}^{ml} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \gamma \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{d}^{obs}$	- Prostota - wielkoskalowe	- tylko problemy liniowe - czułe na błędy
Optymalizacyjna $S(\mathbf{m}) = \ \mathbf{d}^{th}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}^{obs}\ + \gamma \ \mathbf{m} - \mathbf{m}^{apr}\ $	- Prostota - nieliniowa	- brak oszacowania błędów
Probabilistyczna $\sigma(\mathbf{m}) = f(\mathbf{m}) L(\mathbf{m}, \mathbf{d}^{obs})$	- nieliniowa - pełna analiza błędów	- złożona teoria - Efektywne próbkowanie

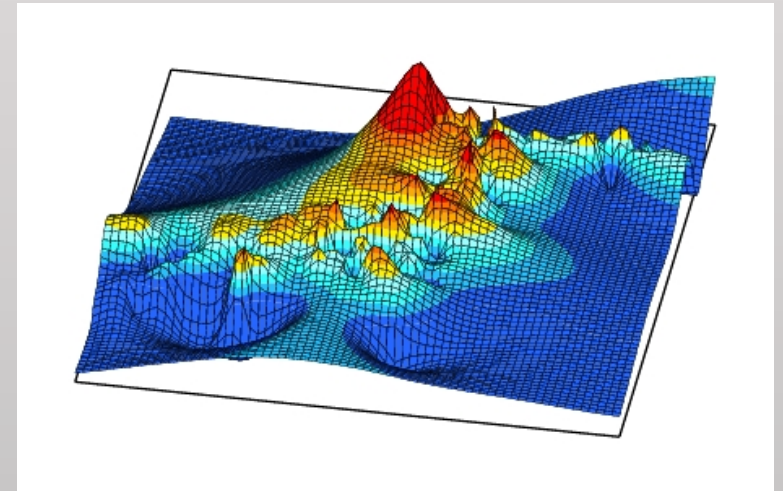
Porównanie algorytmów



Algebraiczny
(Odwrotna projekcja)



Optymalizacyjny
(Przeszukiwanie przestrzeni)



Bayesowski

Technika algebraiczna

$$\mathbf{m}^{est} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{d}^{obs}$$

$$\mathbf{m}^{est} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{d}^{obs}$$

2-¿ 2 jednoznaczne

Technika algebraiczna - I

♦ dwa parametry m_1, m_2

♦ mierzone wielkości: d_1, d_2

♦

$$\begin{aligned} d_1 &= m_1 + m_2 \\ d_2 &= m_1 - m_2 \end{aligned} \tag{1}$$

♦ $d^{obs} = (2, -2)$

♦ $m_1, m_2 = ???$

Technika algebraiczna - I

$$\mathbf{d} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Technika algebraiczna - II

♦ dwa parametry m_1, m_2

♦ mierzone wielkości: $d_1, d_2 \dots d_5$

♦

$$\begin{aligned}d_1 &= m_1 + m_2 \\d_2 &= m_1 - m_2 \\d_3 &= m_1 + 2m_2 \\d_4 &= 2m_1 + m_2 \\d_5 &= -m_1 + 2m_2\end{aligned}\tag{2}$$

♦ $d^{obs} = (2, -2, 4, 2, 4)$

Technika algebraiczna - II

$$\mathbf{d} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}$$

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$$

Technika algebraiczna - III

♦ dwa parametry m_1, m_2

♦ mierzona wielkość: d_1

♦

$$d_1 = m_1 + m_2$$

♦ $d^{obs} = 2$

♦ $m_1, m_2 = \text{????}$

Technika algebraiczna - IV

♦ dwa parametry m_1, m_2

♦ mierzone wielkości: d_1, d_2, d_3

♦

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

♦ $d^{obs} = (2, 0, 4)$

♦ $m_1, m_2 = \text{????}$

Technika algebraiczna - V

♦ dwa parametry m_1, m_2

♦ mierzone wielkości: d_1, d_2, d_3

♦

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

♦ $d^{obs} = (2, 10, -2)$

♦ $m_1, m_2 = \text{????}$

Technika optymalizacyjna

$$||d^{obs} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}|| = \min$$

$$||d^{obs} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}||_D + ||\mathbf{m} - \mathbf{m}^{apr}||_M = \min$$

Normy

l_1	$ \mathbf{d} = \sum_i \left \frac{d^i}{C^i} \right $	Absolute value norm
l_2	$ \mathbf{d} = \sqrt{\sum_{ij} d^i C^{ij} d^j}$	Gaussian norm
l_c	$ \mathbf{d} = \sum_i \log \left(1 + \left(\frac{d^i}{C^i} \right)^2 \right)$	Cauchy norm
l_m	$ \mathbf{d} = \log \left(1 + \sum_i \left(\frac{d^i}{C^i} \right)^2 \right)$	Modified Cauchy norm
l_s	$ \mathbf{d} = \sum_i \log \left[\cosh \left(\frac{x_i}{C_i} \right) \right]$	Hyperbolic secant norm
l_p	$ \mathbf{d} = \sqrt[p]{\sum_i \left(\frac{ d^i }{C_i} \right)^p}$	generalized Gaussian norm

Algorytm optymalizacji

```
Rmin = Rmax
for m_1 = a_{min} : a_{max}
  for m_2 = b_{min} : b_{max}
    R = || d^{obs} \; - \; \; G \cdot m ||
    if (R < Rmin)
      Rmin = R
      m_1^{est} \; = \; \; m_1
      m_2^{est} \; = \; \; m_2
    endif
  end
end
end
```

Algorytm optymalizacji - przykłady

Zagadnienia odwrotne: podejście klasyczne

- ♦ łatwe do zrozumienia
- ♦ stosunkowo łatwe w zastosowaniu do zagadnień estymacji parametrów
- ♦ brak oszacowania dokładności rozwiązań

Rozwiązania problemów odwrotnych są
często niejednoznaczne