

Metody inwersyjne w geofizyce

(3)

Przypomnienie

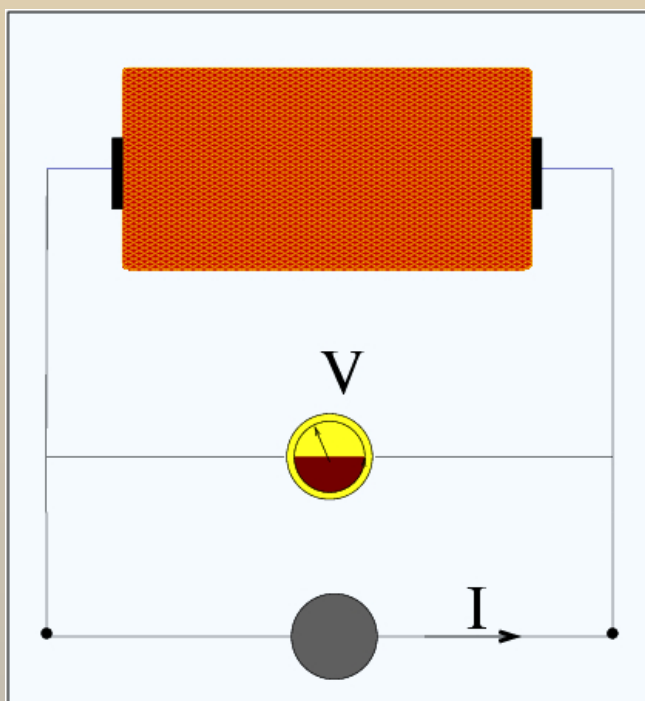
- ♦ Dwa rodzaje problemów
 - ★ Zagadnienia modelowania
 - ★ Zagadnienia odwrotne
- ♦ Zagadnienia odwrotne - różne spojrzenia
 - ★ inwersja jako estymacja parametrów
 - ★ inwersja czyli metoda wnioskowania
 - ★ pomiary bezpośrednie i pośrednie

Dwa typy zagadnień

1. Zrozumienie zachodzącego procesu fizycznego, chemicznego, geologicznego, itp. umożliwiające przewidywanie zachowania się systemu, a więc jego **jakościowe** modelowanie.

2. Ilościowy opis obiektu fizycznego, chemicznego, i ilościowe wyznaczenie wielkości fizycznych opisujący obiekt pozwalające na realistyczne (**ilościowe**) wyznaczanie jego zachowania.

Zagadnienie odwrotne - pomiar pośredni



Data: V

Theory (Ohm law + ...)

$$V = I \rho + n(\rho, \dot{\rho})$$

A priori

$$1 < \rho < 10$$

Zagadnienie odwrotne (najczęściej)

zagadnienie odwrotne



pomiar pośredni

(estymacja parametrów)

Zagadnienia odwrotne - estymacja parametrów

$$\mathbf{d}^{th} = \mathbf{G}(\mathbf{m})$$

Inwersja:

$$\mathbf{d}^{obs} \longrightarrow \mathbf{m}^{est}$$

Zagadnienie odwrotne (ogólnie)

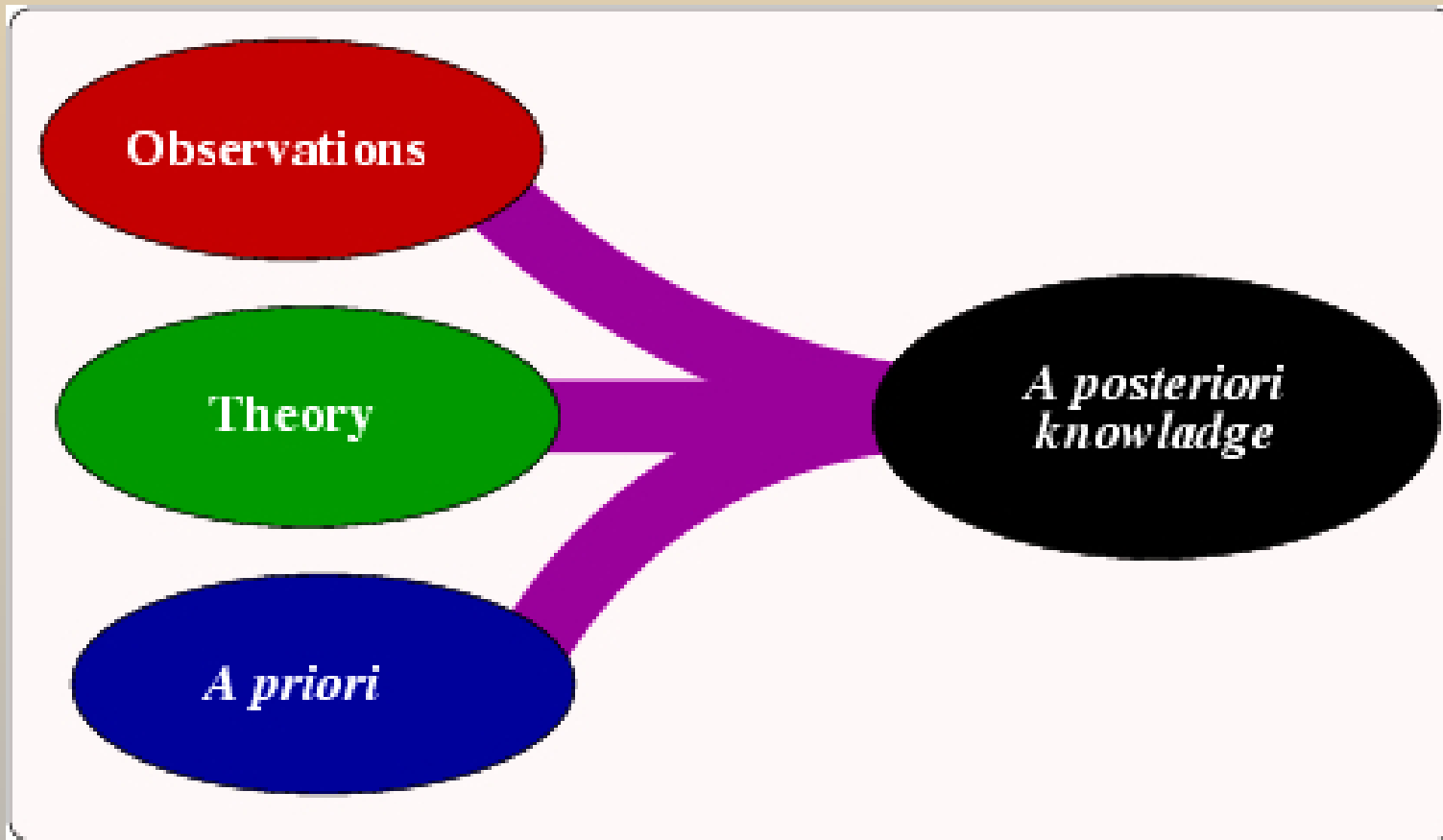
zagadnienie odwrotne



proces wnioskowania

Inwersja - łączenie informacji

(Wnioskowanie)



Estymacja parametrów

Parametry i wielkości mieralne

System fizyczny:

$$p_1, p_2, \dots p_K$$

Parametry układu:

$$\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots m_M)$$

Przewidywane mieralne wielkości:

$$\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots d_N)$$

Parametry “ustalone” (znane *a priori*):

$$\mathbf{m}^{ust} = (u_1, u_2, \dots)$$

Modelowanie:

$$\mathbf{d}^{th} = f(\mathbf{m}, \mathbf{m}^{ust})$$

Przykład - propagacja fal sejsmicznych

System fizyczny:

♦ $\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_r, \mathbf{t}, \mathbf{v}$

Zagadnienie lokalizacji:

♦ $\mathbf{m} = \mathbf{r}_s = (r_x, r_y, r_z)$

♦ $\mathbf{d} = \mathbf{t}$

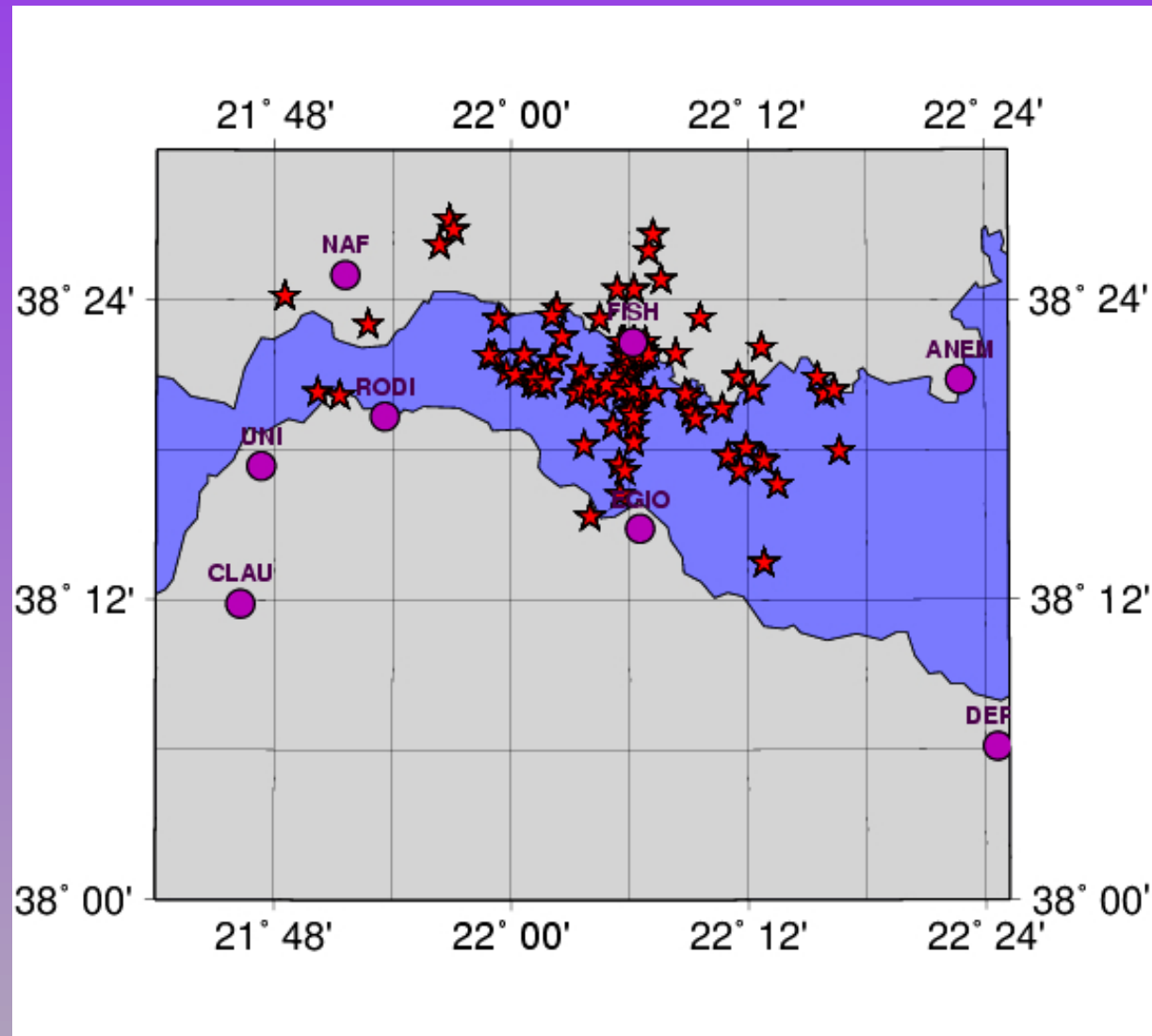
♦ $\mathbf{m}^{ust} = \mathbf{v}, \mathbf{r}_r$

Tomografia prędkościowa:

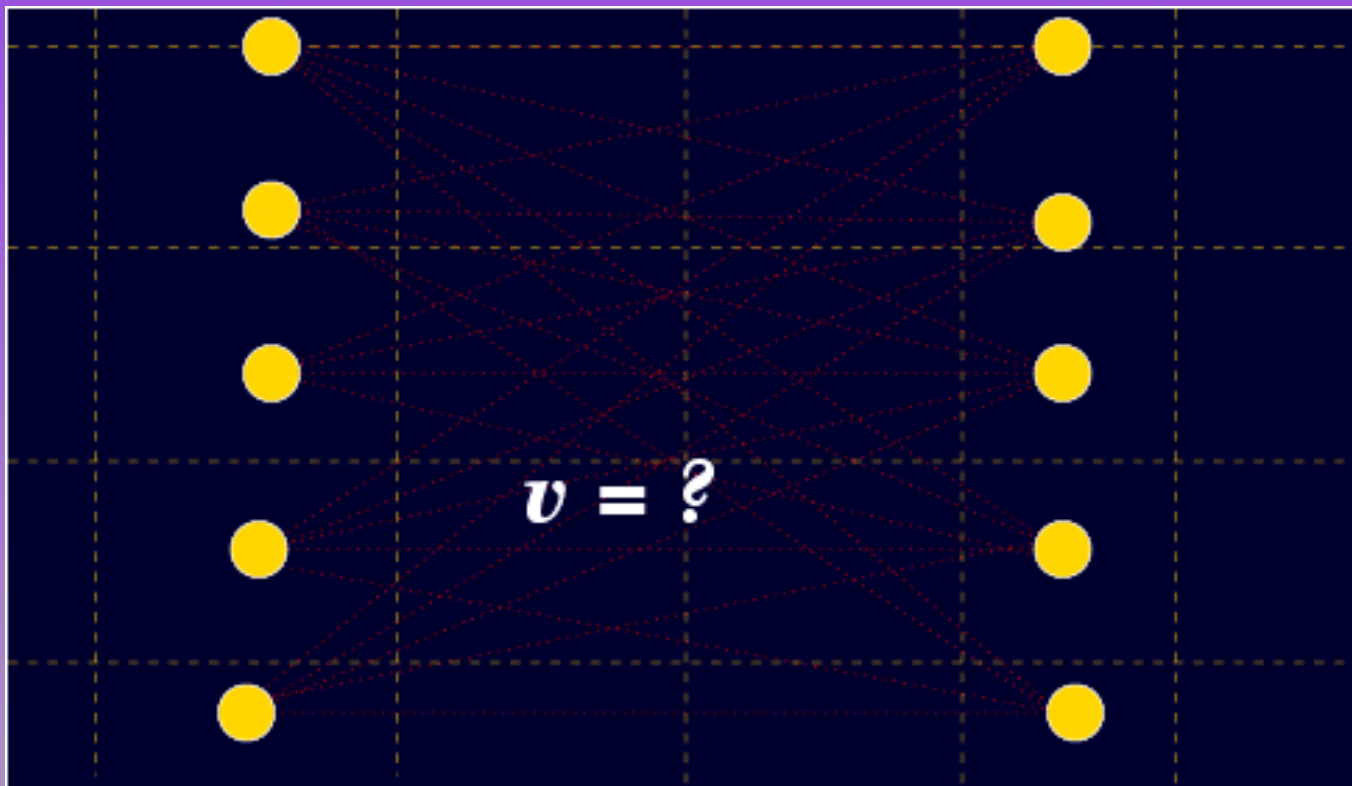
♦ $\mathbf{m} = \mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_M)$

♦ $\mathbf{d} = \mathbf{t}, \mathbf{r}_r, \mathbf{r}_s$

Lokalizacja wstrząsów



Tomografia sejsmiczna



Liniowy problem odwrotny

Podejście algebraiczne

$$\mathbf{d} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}$$

Podejście naiwne:

$$\mathbf{m}^{est} = \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{d}$$

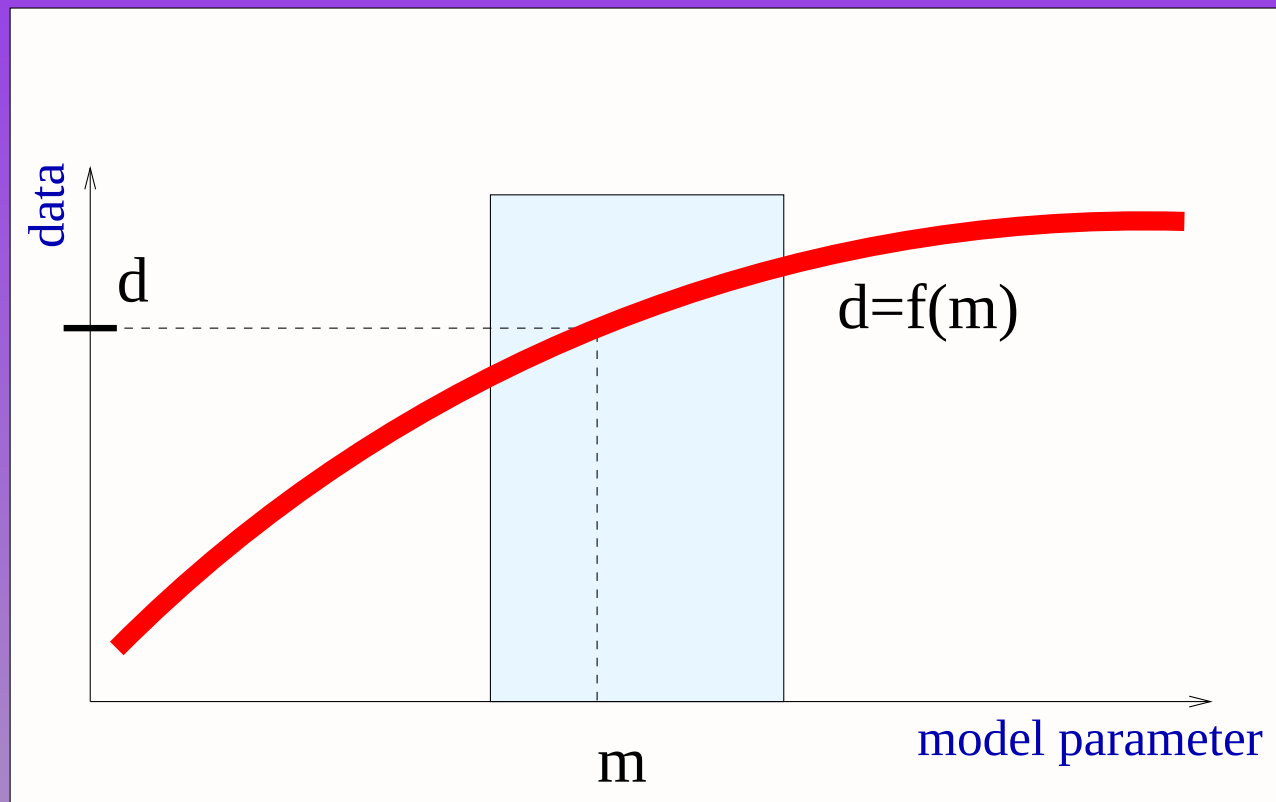
Metoda algebraiczna:

$$\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{d} = \mathbf{G}^T \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}$$

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} \Rightarrow \mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I}$$

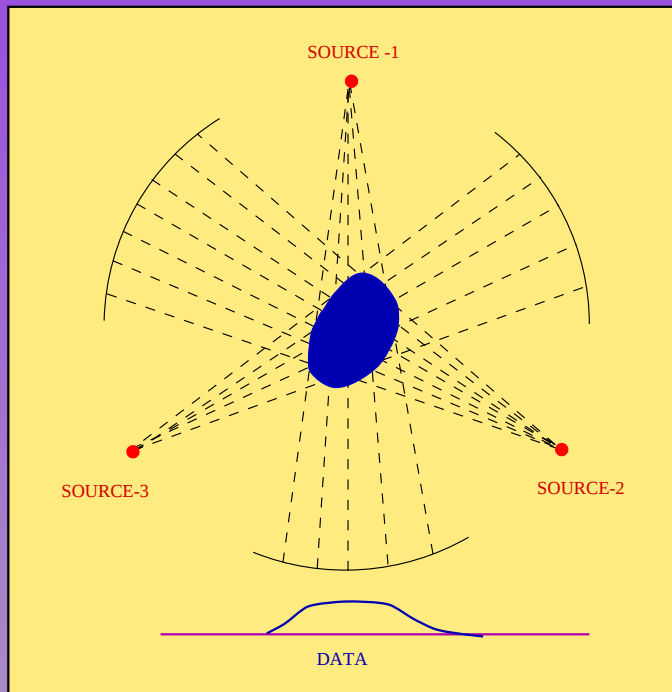
$$\mathbf{m}^{est} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{d}$$

Inwersja - technika *Back projection*

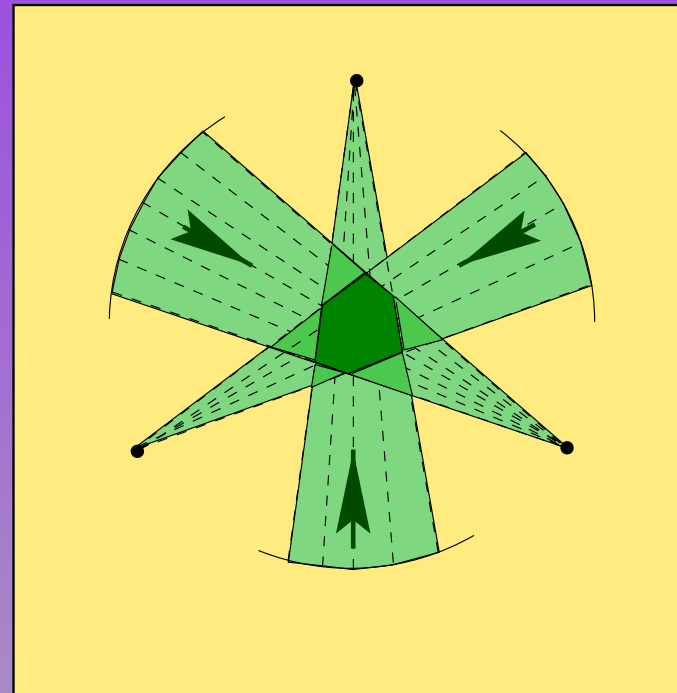


Back projection

Projection



"BackProjection"

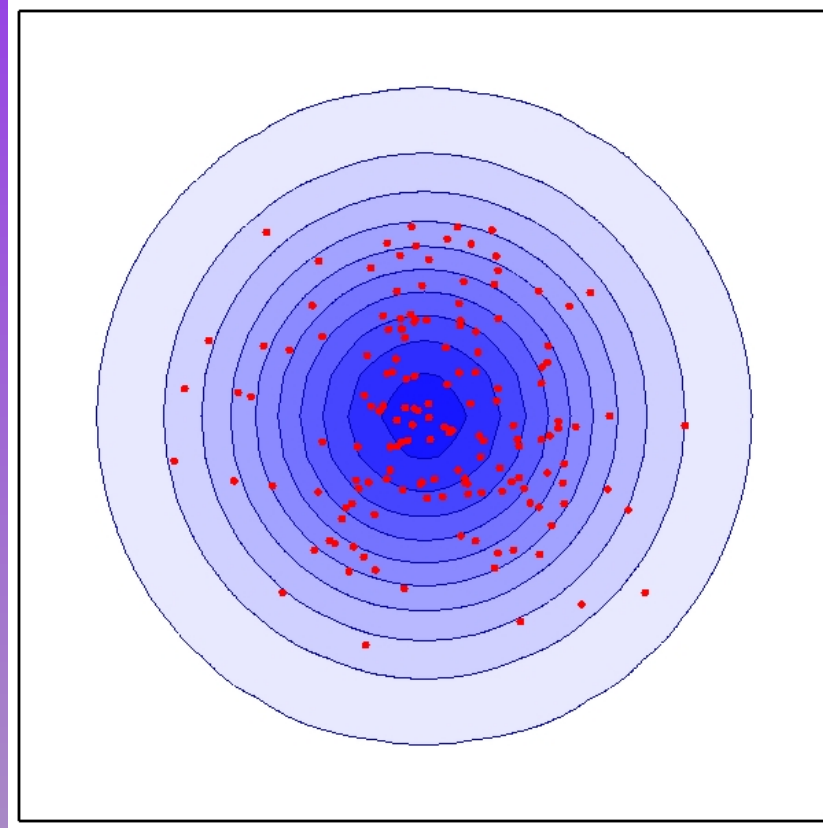


Inwersja - podejście optymalizacyjne

Przeszukiwanie przestrzeni modeli w celu znalezienia modelu “najlepiej odtwarzającego” dane pomiarowe

$$S(\mathbf{m}) = \|\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{d}(\mathbf{m})\| = \min$$

Optymalizacja



Optymalizacja

Metoda najmniejszych kwadratów:

$$(\mathbf{d}^{obs} - f(\mathbf{m}))^T (\mathbf{d}^{obs} - f(\mathbf{m})) = \min$$

Metoda najmniejszych wartości absolutnych

$$\sum_i |\mathbf{d}_i^{obs} - f(\mathbf{m})_i| = \min$$

Podejście optymalizacyjne

Podejście optymalizacyjne (klasyczne)

$$\| \mathbf{G}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}^{obs} \| + \lambda \| \mathbf{m} - \mathbf{m}^a \| = \min$$

- ♦ metoda nieliniowa
- ♦ fizyczny sens regularyzacji
- ♦ poszukujemy jednego (optymalnego) rozwiązania
- ♦ zaniedbane wszystkie błędy i niedokładności

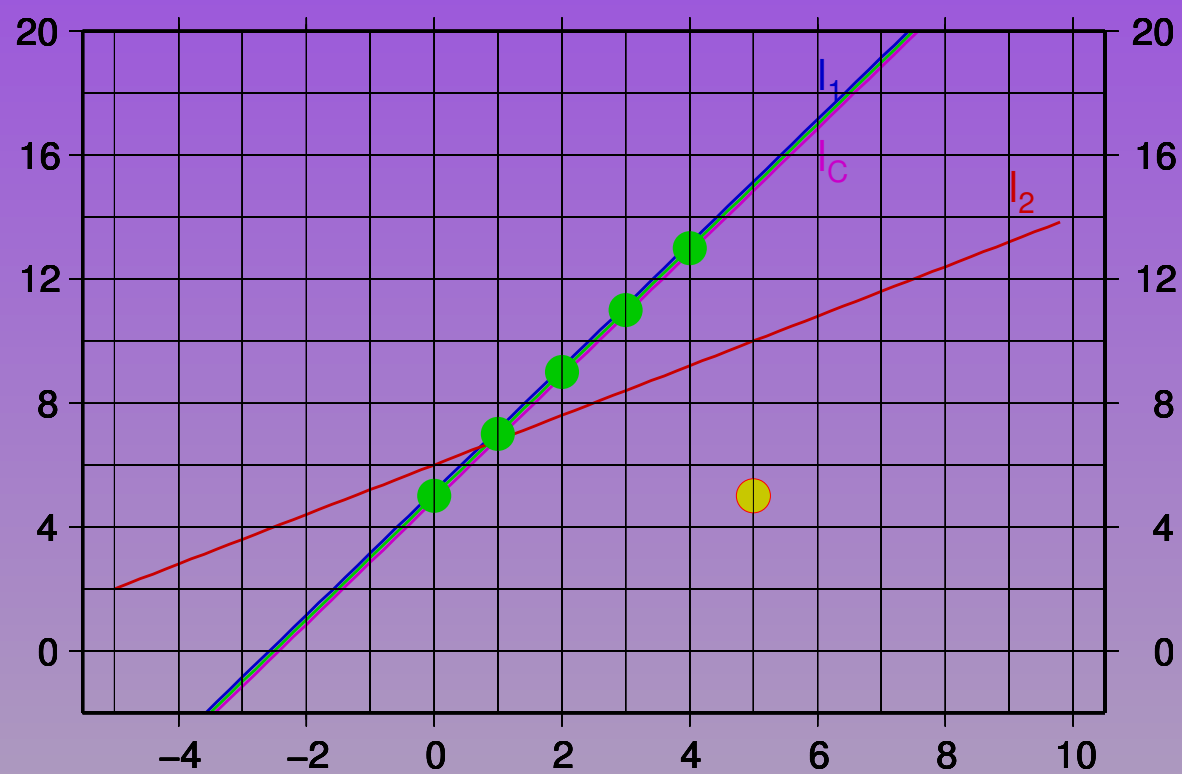
Normy ...

$$\|\mathbf{G}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}^{obs}\|_D + \lambda \|\mathbf{m} - \mathbf{m}^{apr}\|_M = \min$$

$$\sigma(\mathbf{m}) = f(\mathbf{m}) \exp(-\|\mathbf{G}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}^{obs}\|_D)$$

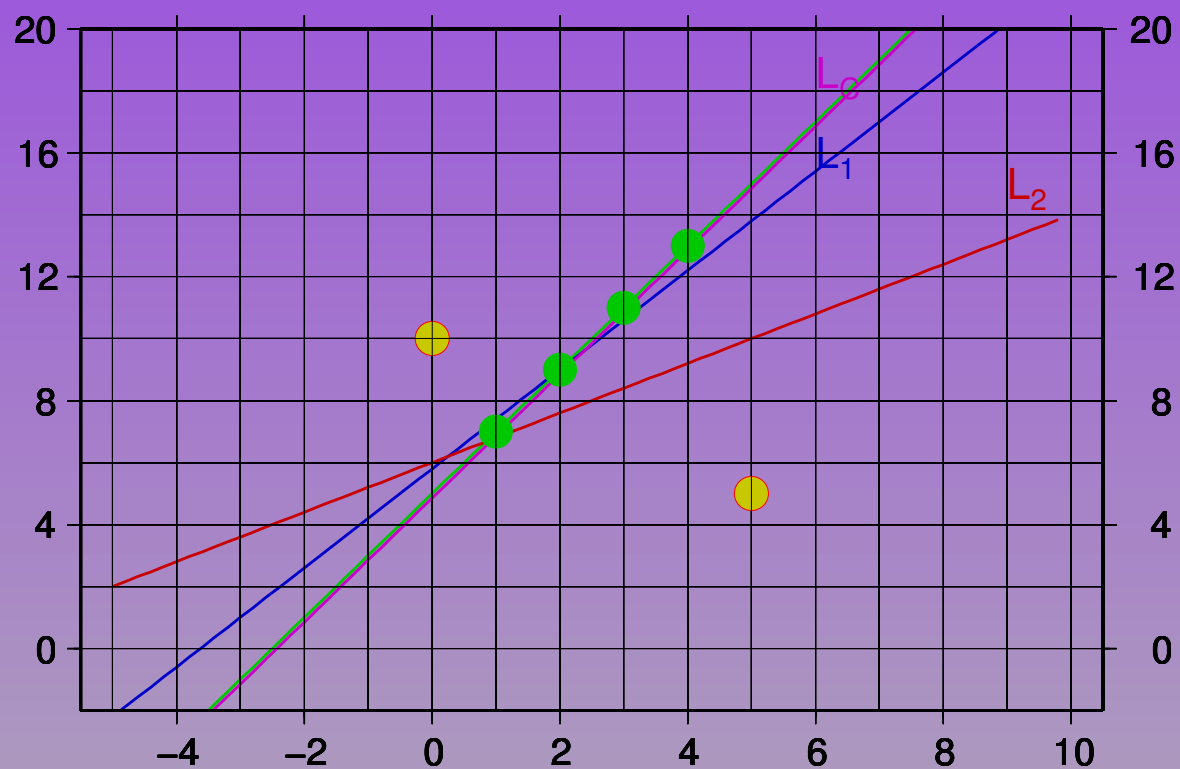
“krzepkość” norm (ang. robustnes)

1 zaburzenie

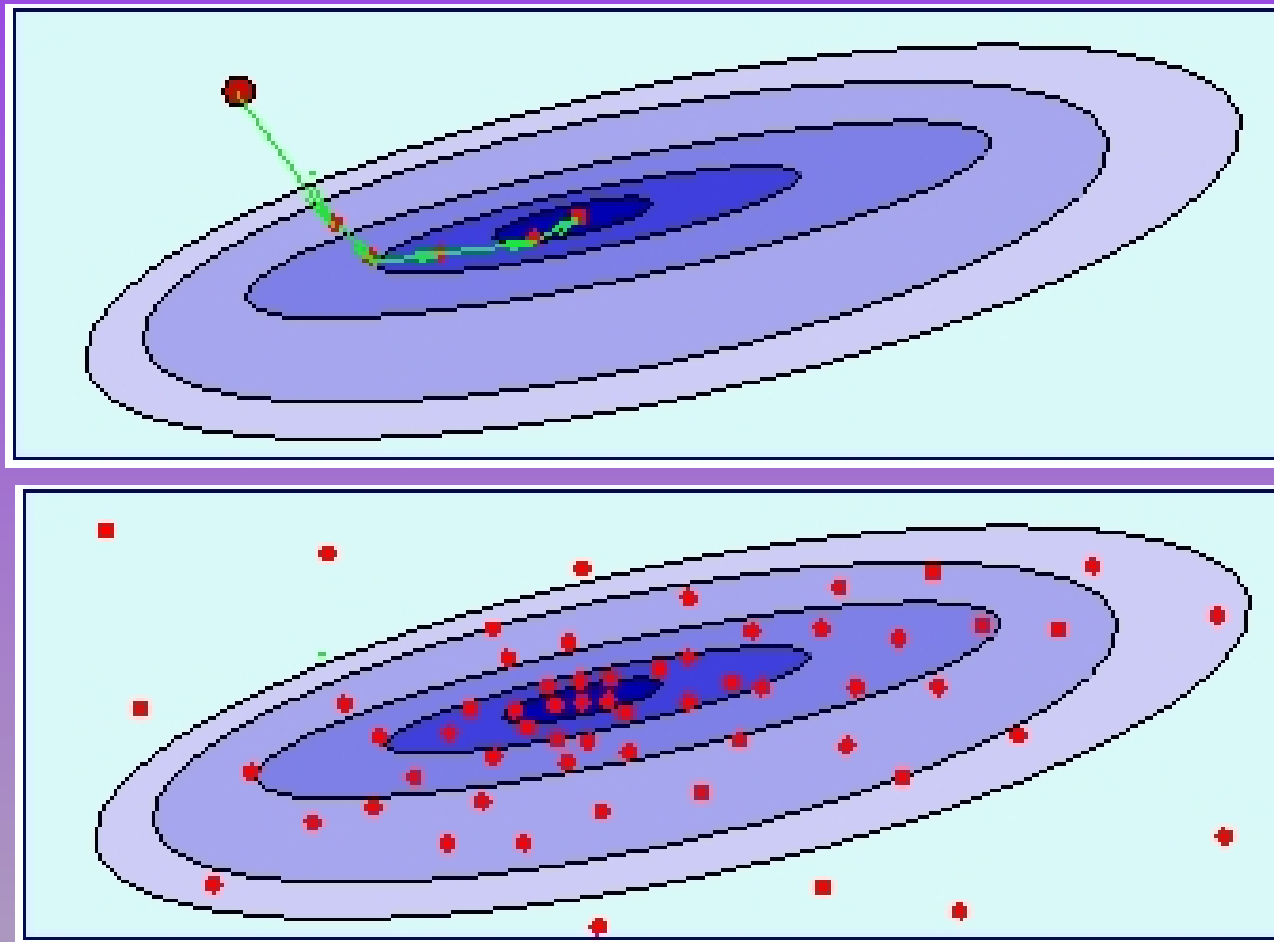


“krzepkość” norm (ang. robustnes)

2 zaburzenia



Optymalizacja gradientowa i Monte Carlo



Metoda: preconditioned steepest descent

1. $\mathbf{m}_0$ - dowolny, $\hat{\mathbf{S}}_0 \approx (\mathbf{I} + \mathbf{C}_M \mathbf{G}^t \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{G})^{-1}$

2. $\gamma_n = \mathbf{C}_M \mathbf{G}^t \mathbf{C}_D^{-1} (\mathbf{G} \mathbf{m}_n - \mathbf{d}^{obs}) + (\mathbf{m}_n - \mathbf{m}^{apr})$

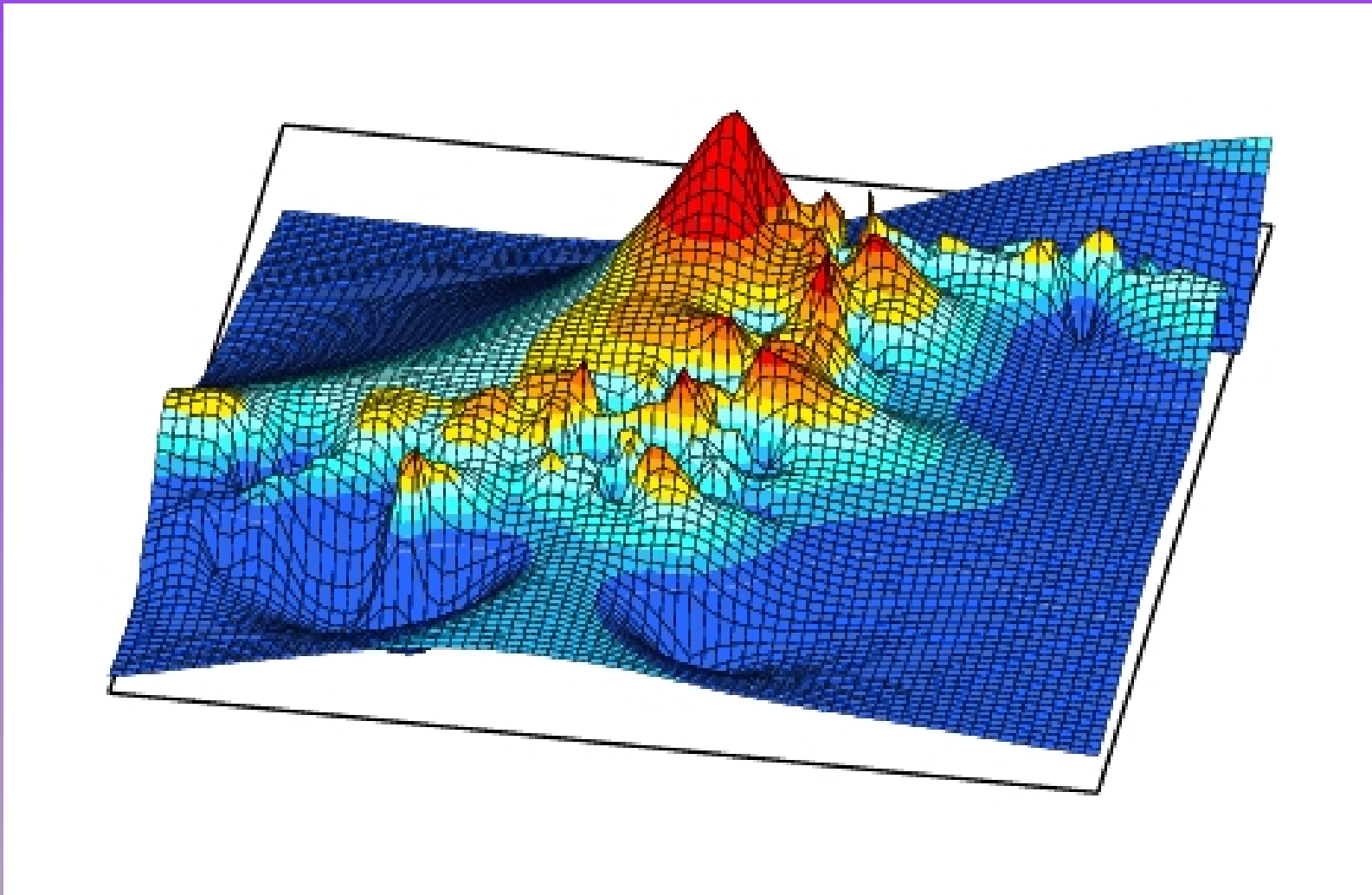
3. $\phi_n = \hat{\mathbf{S}}_0 \gamma_n$

4. $\mathbf{b}_n = \mathbf{G} \phi_n$

5. $\mu_n = \frac{\gamma_n^t \mathbf{C}_M^{-1} \phi_n}{\phi_n^t \mathbf{C}_M^{-1} \phi_n + \mathbf{b}_n^t \mathbf{C}_D \mathbf{b}_n}$

6. $\mathbf{m}_{n+1} = \mathbf{m}_n - \mu_n \phi_n$

Optymalizacja gradientowa - ograniczenia



Model najbardziej prawdopodobny - optymalizacja

♦ szukanie modelu najbardziej prawdopodobnego

$$\mathbf{m}^{ml} : \quad \sigma(\mathbf{m}^{ml}) = \max$$

★ metody gradientowe

★ metody Monte Carlo

➡ Symulowane wyżarzanie

➡ Algorytm Genetyczny