

Elementy współczesnej teorii inwersji

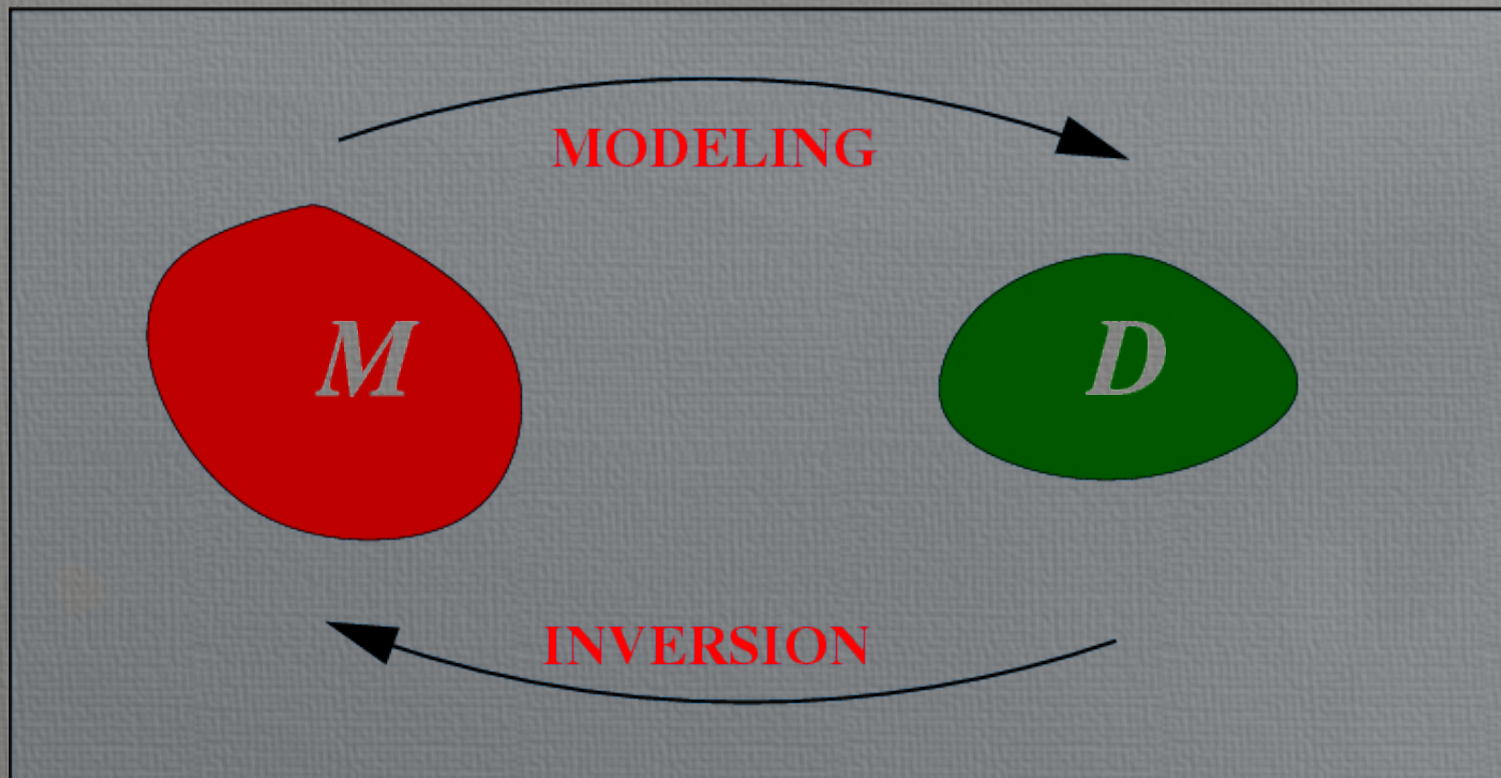
Metoda algebraiczna

W. Dębski

27.11.2014

Zagadnienia modelowania i inwersji

uogólnienie



Zagadnienie odwrotne - pomiary pośrednie

zagadnienie odwrotne



pomiar pośredni

(estymacja parametrów)

Zagadnienia odwrotne - estymacja parametrów

Modelowanie:

$$\mathbf{m} \longrightarrow \mathbf{d}^{th} = \mathbf{G}(\mathbf{m})$$

Inwersja:

$$\mathbf{d}^{obs} \longrightarrow \mathbf{m}^{est}$$

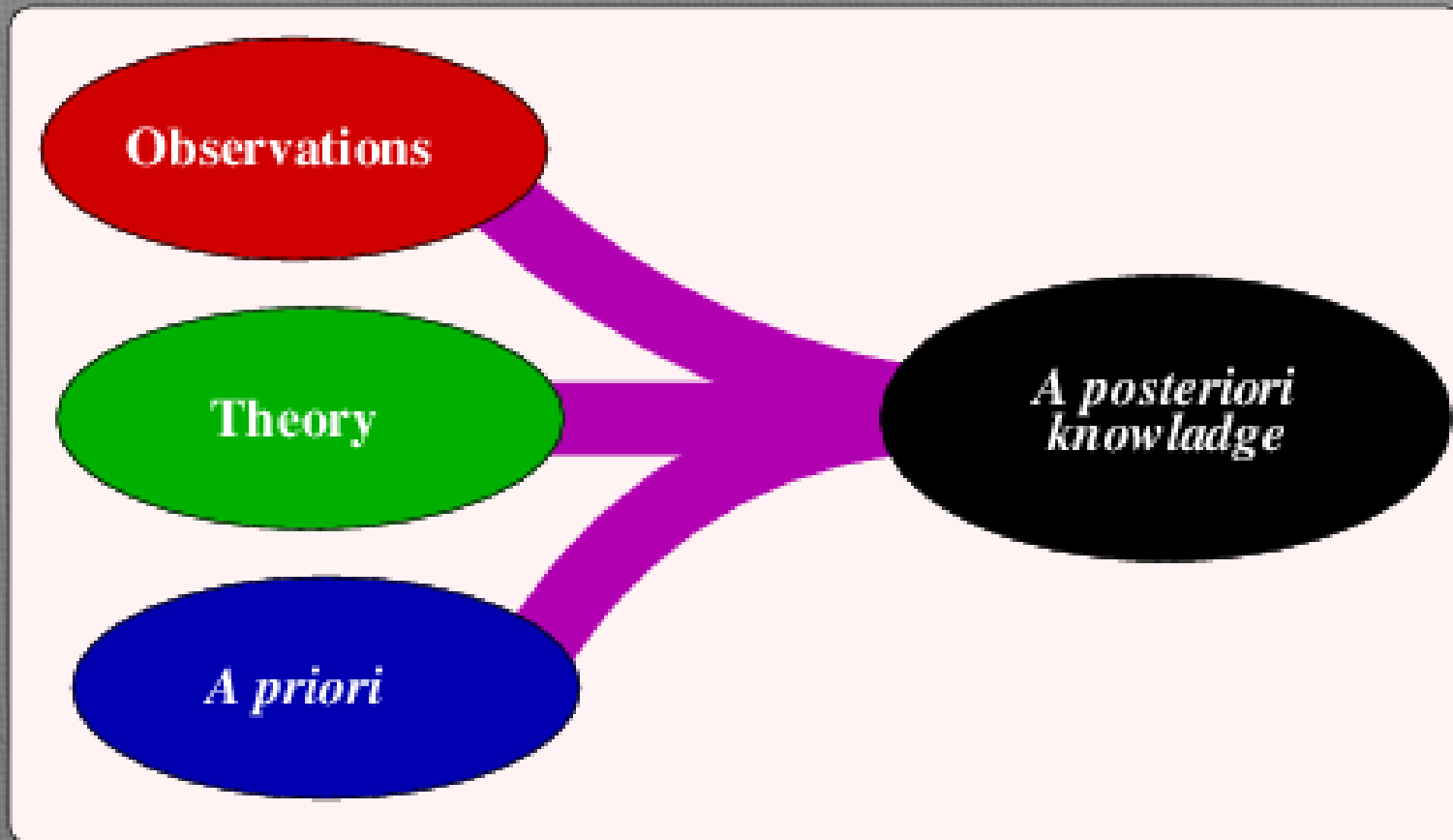
Zagadnienie odwrotne (ogólnie)

zagadnienie odwrotne



proces wnioskowania

Inwersja - Wnioskowanie



Zagadnienia odwrotne - estymacja parametrów

Parametry i wielkości mieralne

System fizyczny:

$$p_1, p_2, \dots, p_K$$

Parametry układu:

$$\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_M)$$

Przewidywane mieralne wielkości:

$$\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_N)$$

Parametry “ustalone” (znane *a priori*):

$$\mathbf{m}^{fix} = (u_1, u_2, \dots)$$

Przykład - propagacja fal sejsmicznych

System fizyczny:

◆ $\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_r, \mathbf{t}, \mathbf{v}$

Zagadnienie lokalizacji:

◆ $\mathbf{m} = \mathbf{r}_s = (r_x, r_y, r_z)$

◆ $\mathbf{d} = \mathbf{t}$

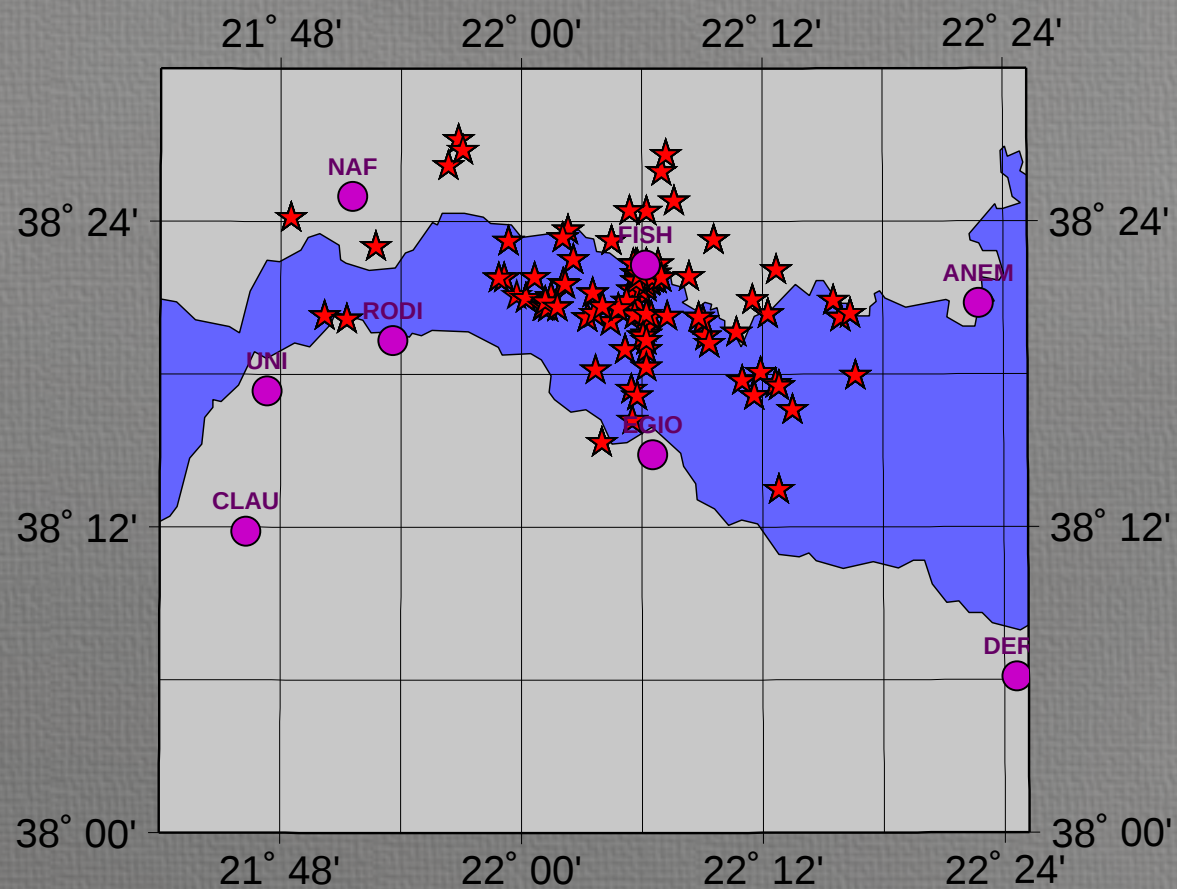
◆ $\mathbf{m}^{fix} = \mathbf{v}, \mathbf{r}_r$

Tomografia prędkościowa:

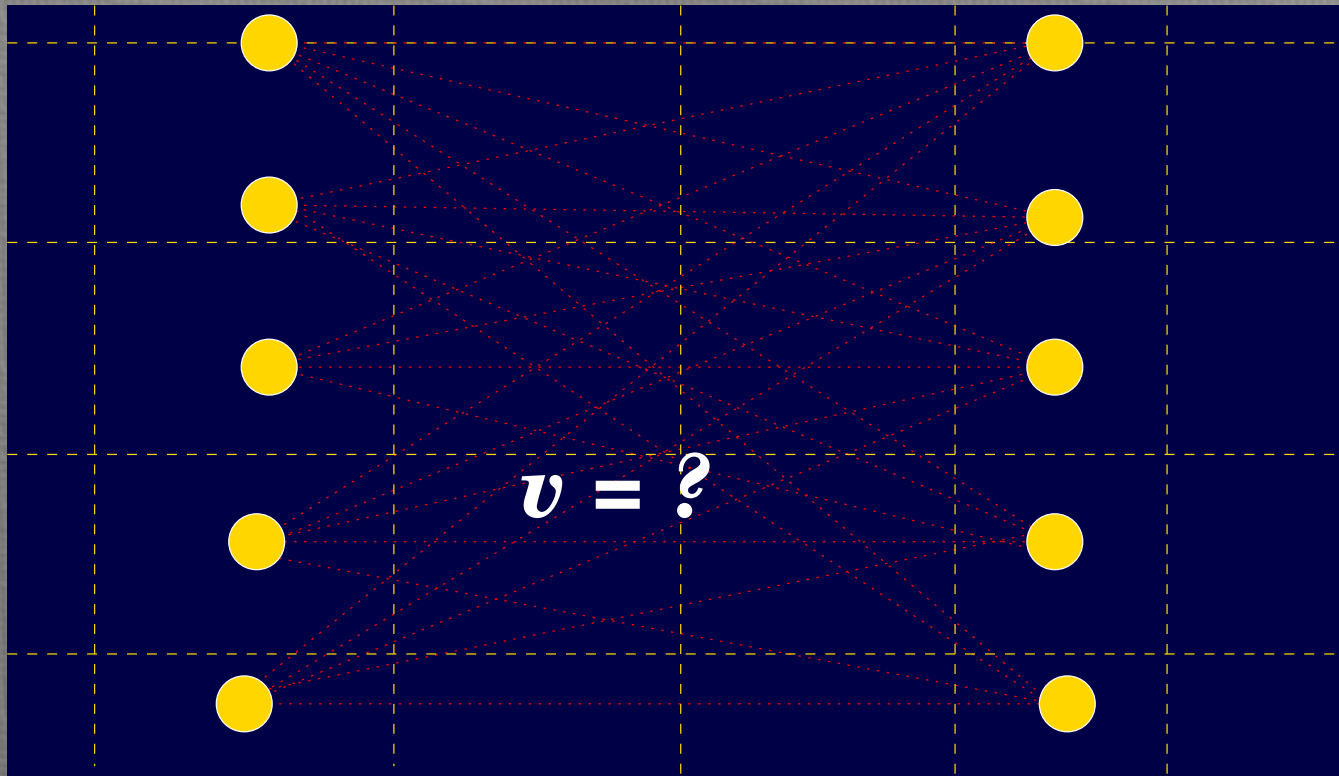
◆ $\mathbf{m} = \mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_M)$

◆ $\mathbf{d} = \mathbf{t}, \quad \mathbf{m}^{fix} = \mathbf{r}_r, \mathbf{r}_s$

Lokalizacja wstrząsów



Tomografia sejsmiczna



Liniowy problem odwrotny

$$\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_M) \in \mathcal{M}$$

$$\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_N) \in \mathcal{D}$$

$$\mathbf{d}(\mathbf{m}) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}$$

$$\mathbf{d}(\mathbf{m}) = \mathbf{G}(\mathbf{m}) \approx \mathbf{G}(\mathbf{m}_o) + \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{m}$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_o + \delta \mathbf{m}$$

Liniowy problem odwrotny

Podejście naiwne:

$$\mathbf{m}^{est} = \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{d}^{obs}$$

Ale

$$\dim(\mathbf{G}) = N \times M$$

jest na ogół macierzą prostokątną

Liniowy problem odwrotny

$$\mathbf{d} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{m} \quad / \times \mathbf{G}^T$$

$$\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{d} = \mathbf{G}^T \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}$$

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} \Rightarrow \mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I}$$

$$\mathbf{m}^{est} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{d}^{obs}$$

Liniowy problem odwrotny

$$\mathbf{m} \sim \mathbf{m}^{apr}; \quad \bar{\mathbf{d}} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}^{apr}$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{m} \quad / \quad - \bar{\mathbf{d}}$$

$$\mathbf{d} - \bar{\mathbf{d}} = \mathbf{G} \cdot (\mathbf{m} - \mathbf{m}^{apr})$$

$$\mathbf{G}^T \cdot (\mathbf{d} - \bar{\mathbf{d}}) = \mathbf{G}^T \mathbf{G} \cdot (\mathbf{m} - \mathbf{m}^{apr})$$

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} \implies \mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I}$$

$$\mathbf{m}^{est} = \mathbf{m}^{apr} + (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T \cdot (\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}^{apr})$$

Liniowy problem odwrotny

λ - parametr dowolny $\implies$ rozwiązanie jest subiektywne

$$\mathbf{m}^{est} = \mathbf{m}^{est}(\lambda)$$

1) $\lambda \rightarrow \infty$

$$\mathbf{m}^{est} \sim \mathbf{m}^{apr} + \frac{1}{\lambda} \mathbf{G}^T \cdot (\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}^{apr})$$

2) $\lambda \rightarrow 0$

$$\mathbf{m}^{est} \dots$$

Liniowy problem odwrotny - subiektywność rozwiązania

$$\mathbf{m}^{est} = \mathbf{m}^{apr} + (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T \cdot (\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}^{apr})$$

Założmy, że $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ jest diagonalna

$$1) (\mathbf{G}^T \mathbf{G})_{ii} \neq 0$$

$$\mathbf{m}^{est} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \cdot (\mathbf{d}^{obs})$$

$$2) (\mathbf{G}^T \mathbf{G})_{ii} = 0$$

$\mathbf{m}^{est}$ – nieokreślone

Liniowy problem odwrotny - ocena rozdzielczości

$$\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_M)$$

- ♦ jak dokładnie potrafimy wyznaczyć m_i ?
- ♦ czy otrzymane m_i, m_j są skorelowane ?

$$\mathbf{m}^{est} = \mathbf{m}^{apr} + (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T \cdot (\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}^{apr})$$

$$\mathbf{d}^{true} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}^{true}; \quad \mathbf{d}^{obs} = \mathbf{d}^{true}$$

$$\mathbf{m}^{est} - \mathbf{m}^{apr} = \mathbf{R}(\lambda) \cdot (\mathbf{m}^{true} - \mathbf{m}^{apr})$$

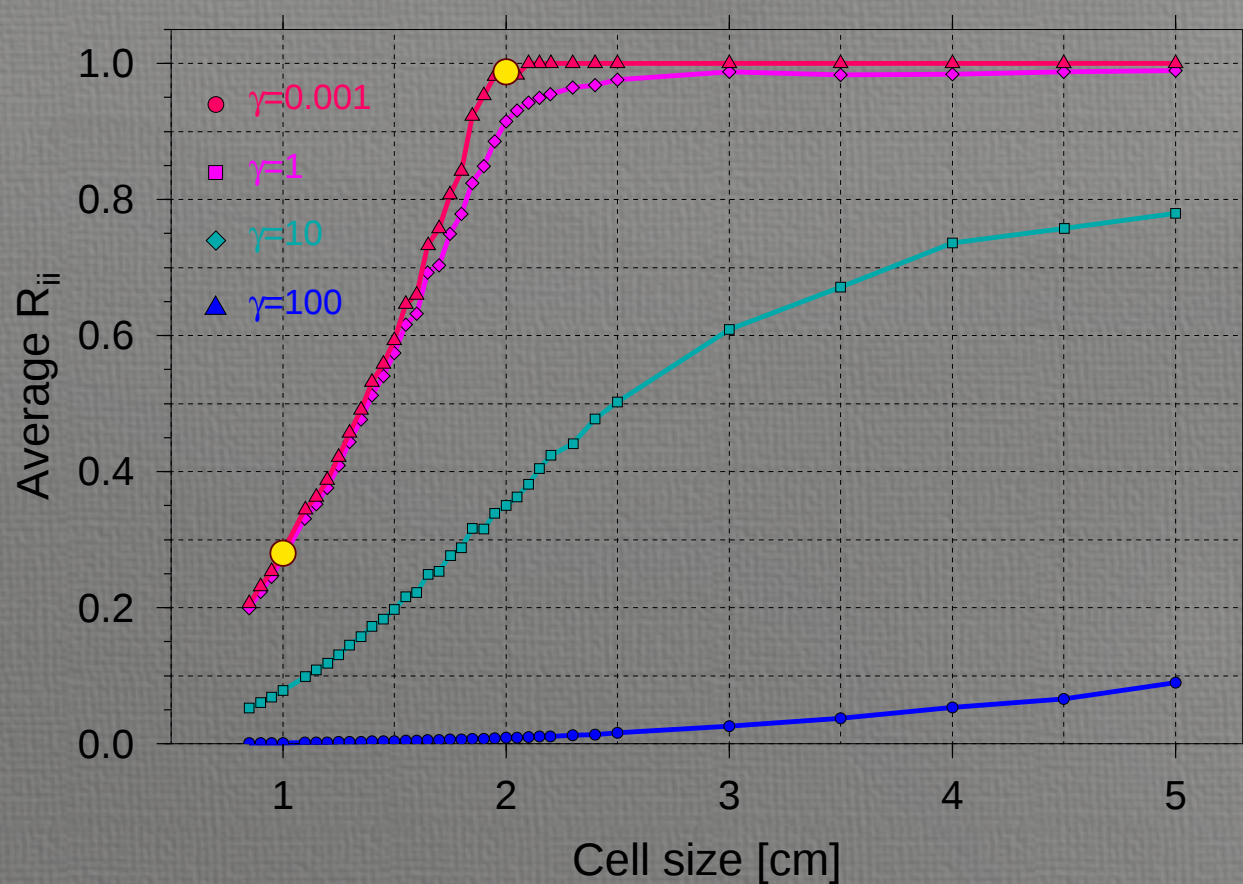
Liniowy problem odwrotny - ocena rozdzielczości

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{G}^T \mathbf{G}}{\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I}}$$

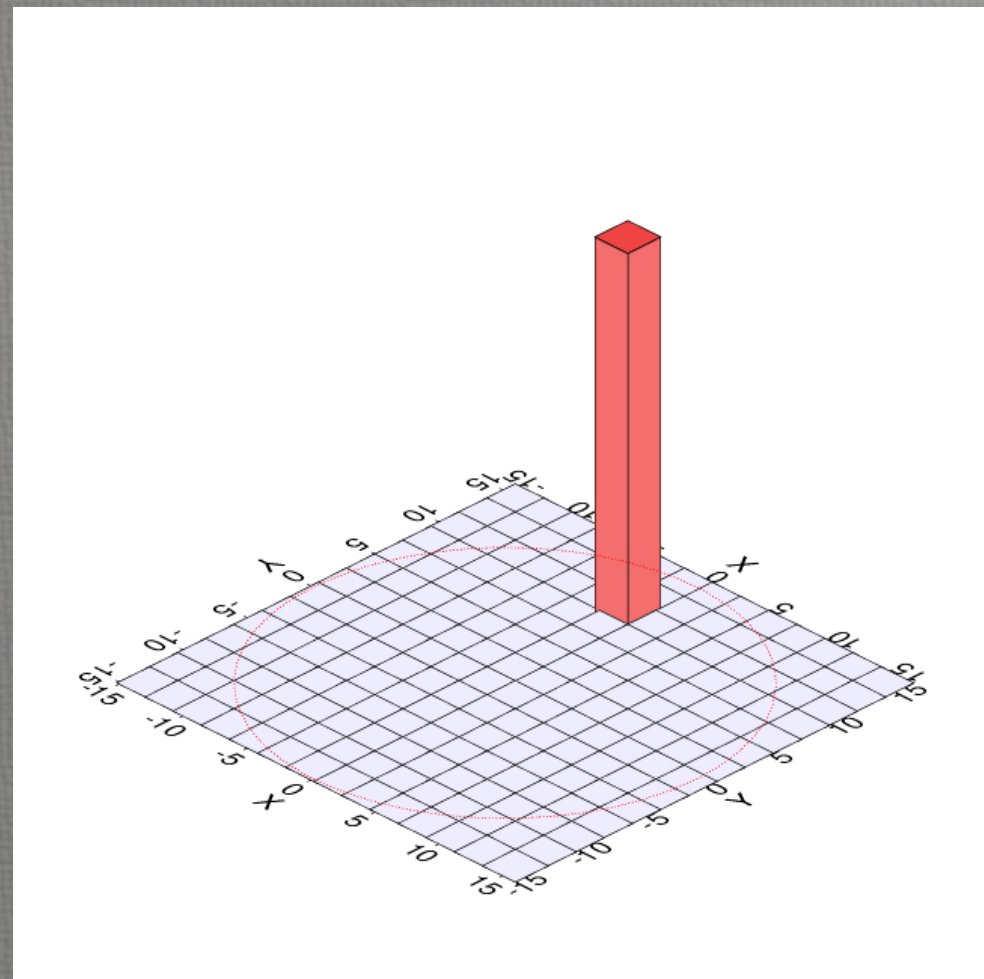
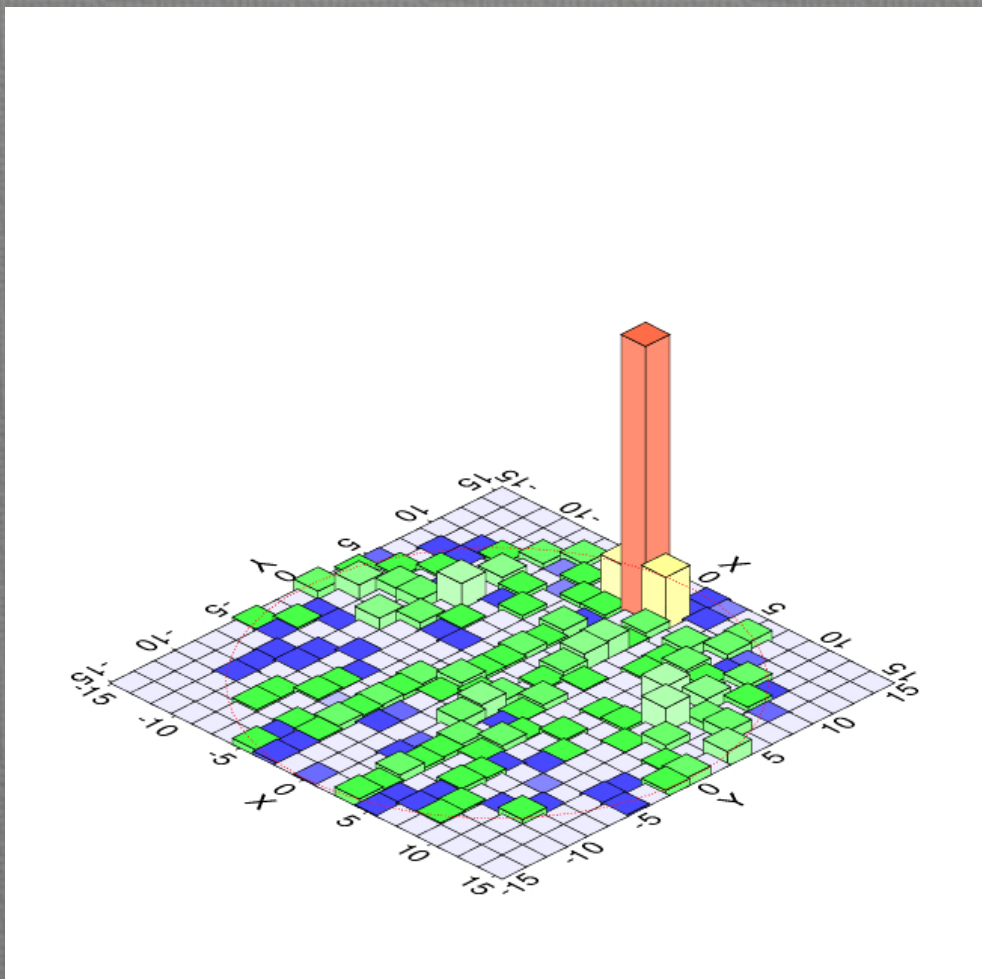
$$m_i^{est} = \mathbf{R}_{ij} m_j^{true}$$

Otrzymane parametry $\mathbf{m}^{est}$ są “przeffitowanymi” obrazami nieznanym, prawdziwym $\mathbf{m}^{true}$. Obecność tego “filtru” wynika ze skończonej ilości posiadanych danych a więc i informacji o parametrach $\mathbf{m}$.

Liniowy problem odwrotny - ocena rozdzielczości



Liniowy problem odwrotny - ocena rozdzielczości



Technika algebraiczna - przykład A

- ♦ dwa parametry m_1, m_2
- ♦ mierzone wielkości: d_1, d_2



$$\begin{aligned} d_1 &= m_1 + m_2 \\ d_2 &= m_1 - m_2 \end{aligned} \tag{1}$$

- ♦ $d^{obs} = (2, -2)$
- ♦ $m_1, m_2 = \text{????}$

Technika algebraiczna - przykład B

$$\mathbf{d} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$m_1 = 0; \quad m_2 = 2$$

Technika algebraiczna - B

- ♦ dwa parametry m_1, m_2
- ♦ mierzone wielkości: $d_1, d_2 \dots d_5$

- ♦
$$\begin{aligned}d_1 &= m_1 + m_2 \\d_2 &= m_1 - m_2 \\d_3 &= m_1 + 2m_2 \\d_4 &= 2m_1 + m_2 \\d_5 &= -m_1 + 2m_2\end{aligned}\tag{2}$$

- ♦ $d^{obs} = (2, -2, 4, 2, 4)$

Technika algebraiczna - B

$$\mathbf{d} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}$$

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$$

$$m_1 = 0; \quad m_2 = 2$$

Technika algebraiczna - C

♦ dwa parametry m_1, m_2

♦ mierzona wielkość: d_1

♦

$$d_1 = m_1 + m_2$$

♦ $d^{obs} = 2$

♦ $m_1, m_2 = \text{????}$

Technika algebraiczna - D

- ♦ dwa parametry m_1, m_2
- ♦ mierzone wielkości: d_1, d_2, d_3



$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- ♦ $d^{obs} = (2, 0, 4)$
- ♦ $m_1, m_2 = \text{????}$

Technika algebraiczna - E

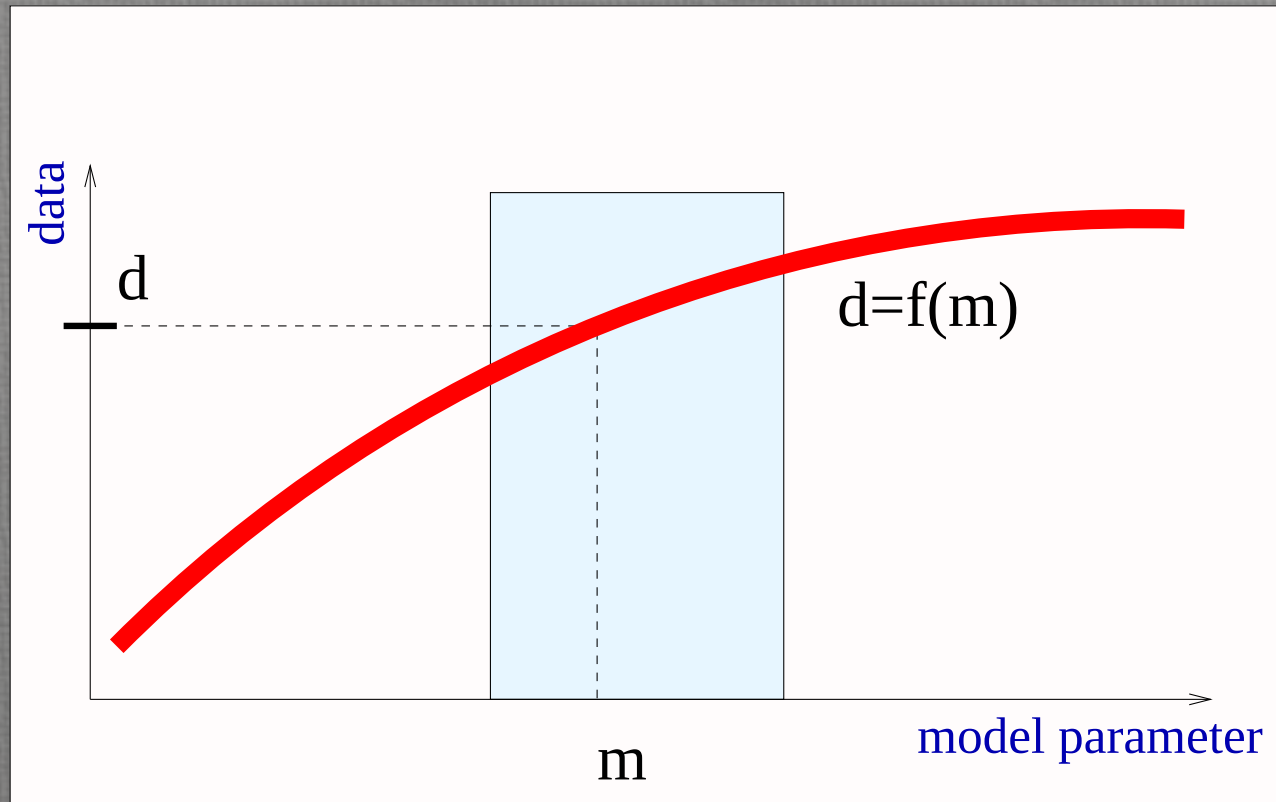
- ♦ dwa parametry m_1, m_2
- ♦ mierzone wielkości: d_1, d_2, d_3



$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

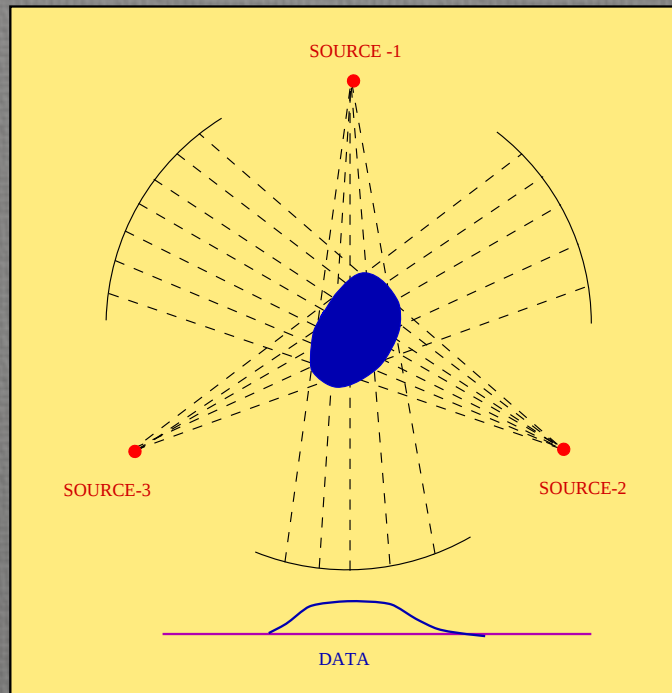
- ♦ $d^{obs} = (2, 10, -2)$
- ♦ $m_1, m_2 = \text{????}$

Inwersja - technika *Back projection*

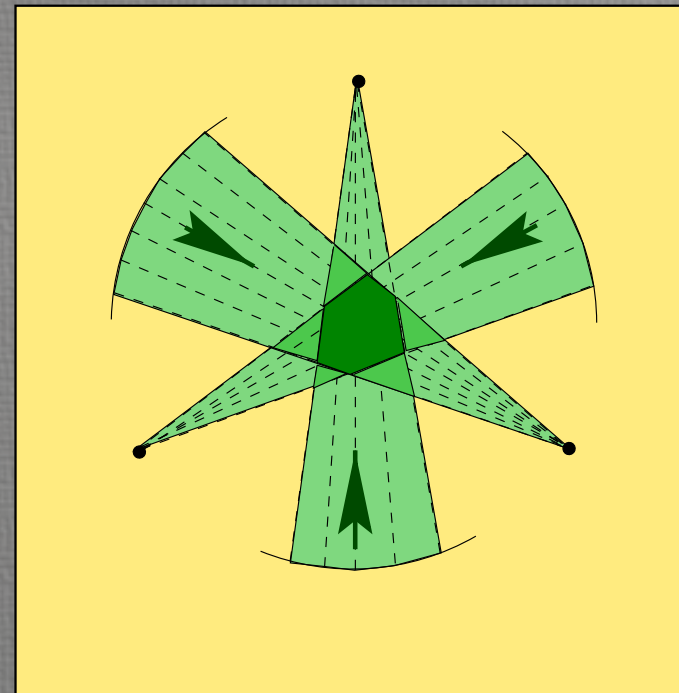


Back projection

Projection



"BackProjection"



Koniec