

Problemy odwrotne w geofizyce:

Tomografia sejsmiczna (L7)

Wojciech Dębski

debski@igf.edu.pl

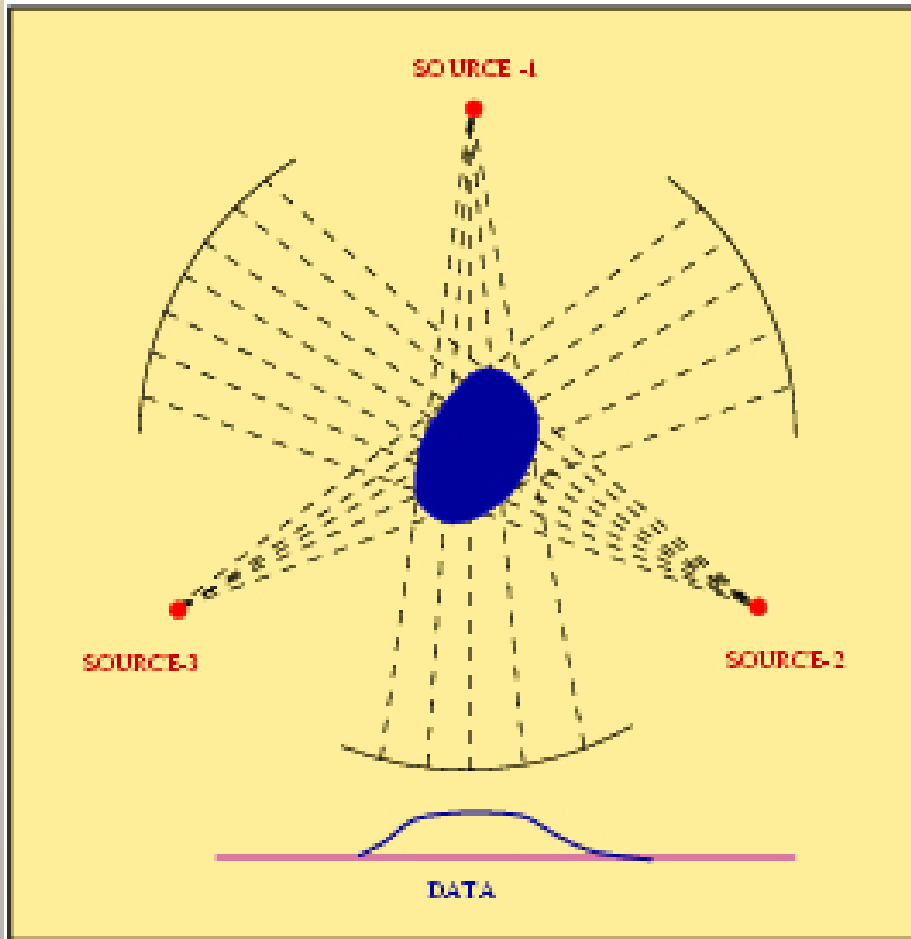
[www.igf.edu.pl/~ debski](http://www.igf.edu.pl/~debski)

Plan wykładu

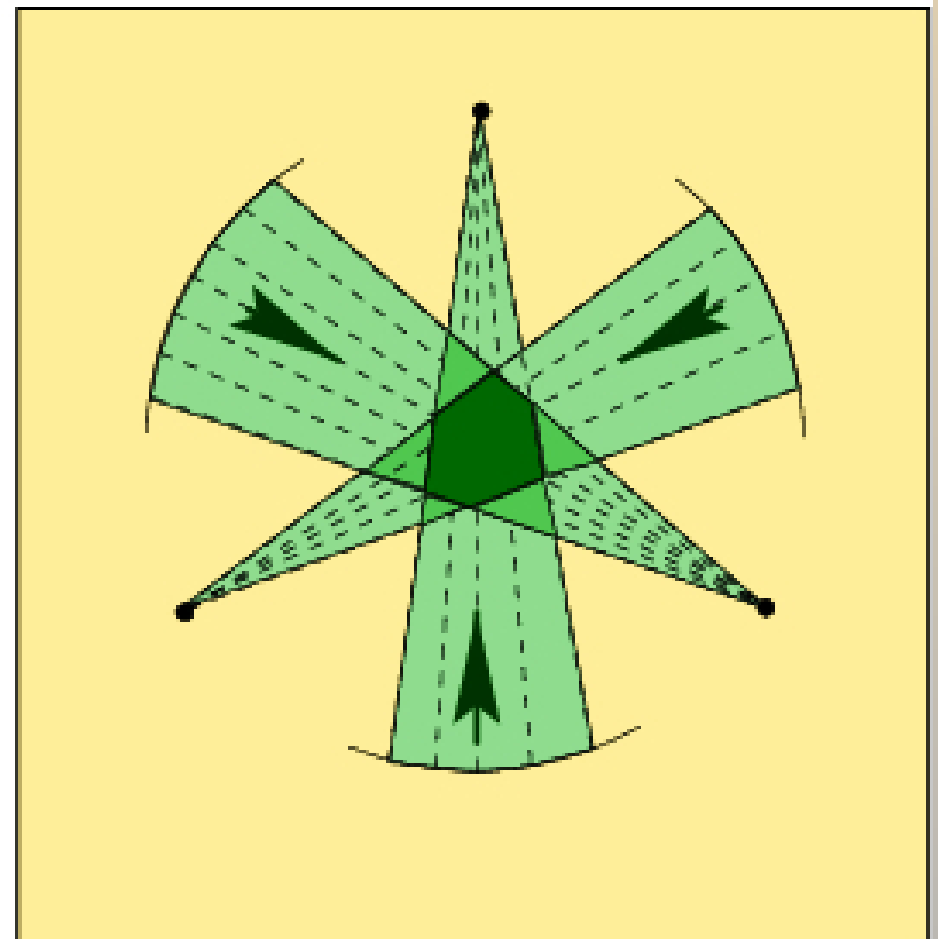
- ❖ Prędkościowa Tomografia sejsmiczna (ang. *delay time tomography*)
 - ★ Idea tomografii: (ang. *back projection*)
 - ★ Klasyczne sformułowanie
 - ★ Tomografia liniowa - technika Backus'a i Gilberta
 - ➔ niejednoznaczność problemu
 - ➔ optymalna dyskretyzacja
 - ➔ rozdzielczość przestrzenna
- ❖ Technika Bayesowska - analiza błędów
- ❖ Przykłady
 - ★ Experiment QC-1
 - ★ Zatoka Koryncka
 - ★ Tomografia regionalna - Japonia
 - ★ Kopalnia miedzi "Rudna"

Idea tomografii - podejście poglądowe

Projection



"BackProjection"



Idea tomografii - sformułowanie matematyczne

Cel: wyznaczenie (nieinwazyjne) przestrzennego rozkładu parametru $\mathbf{v}$ korzystając z zależności:

$$\mathbf{d}[\mathbf{v}] = \int_{ray} \mathbf{v}(s) \, ds$$

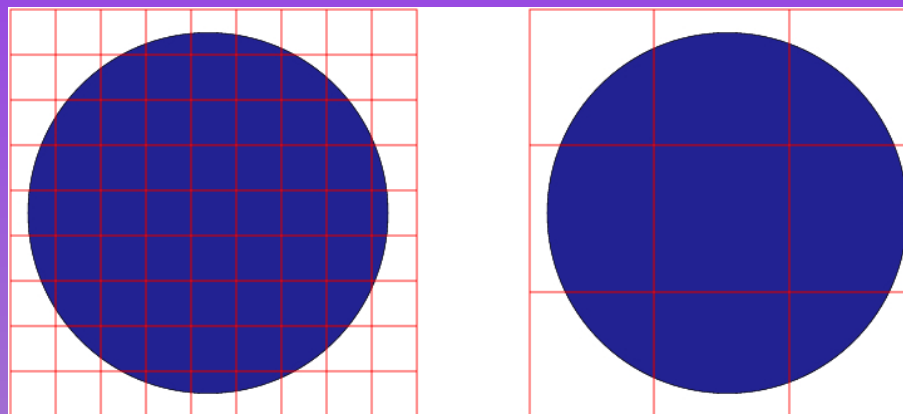
Tomografia sejsmiczna - założenia i główne cechy

- ❖ Przybliżenie wysokoczęstotliwościowe: $\lambda \ll |dx|$ - fale rozchadzą się wzdłuż “cienkich” promieni, np.:

$$t^{th}[v] = \int_{ray} \frac{ds}{v(s)}$$

- ❖ niejednorodności są “małe”
- ❖ potrzebne jest “dobre” pokrycie badanego obszaru promieniami

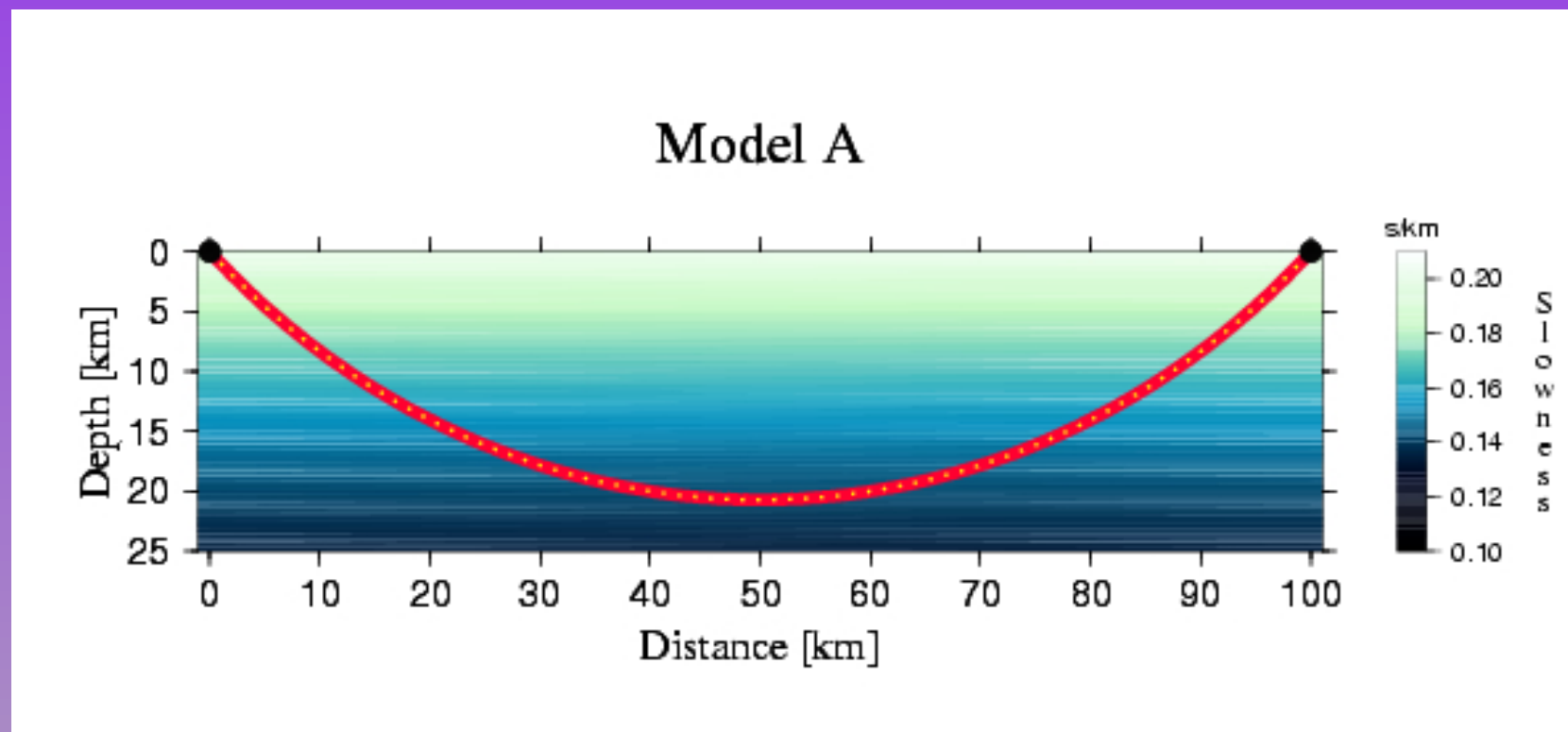
Tomografia sejsmiczna - dyskretyzacja v



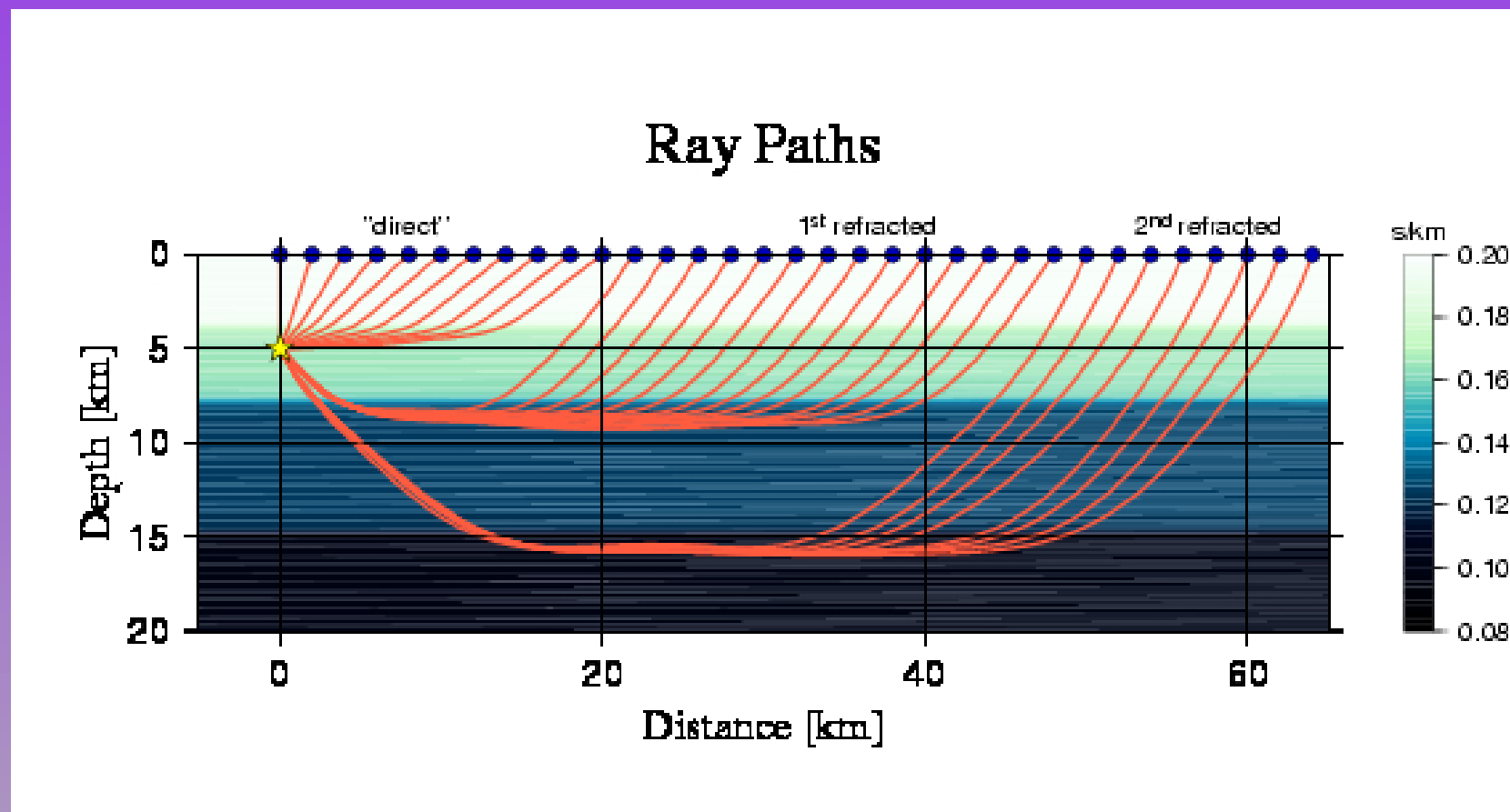
$$\mathbf{v}(x, y, z) \implies v_1, v_2, \dots, v_N$$

$$t_i^{th}(v_1, v_2, \dots) = \sum_{j=1}^N G_{ij} \frac{1}{v_j}$$

Nieliniowość w tomografii sejsmicznej



Nieliniowość w tomografii sejsmicznej, cd.

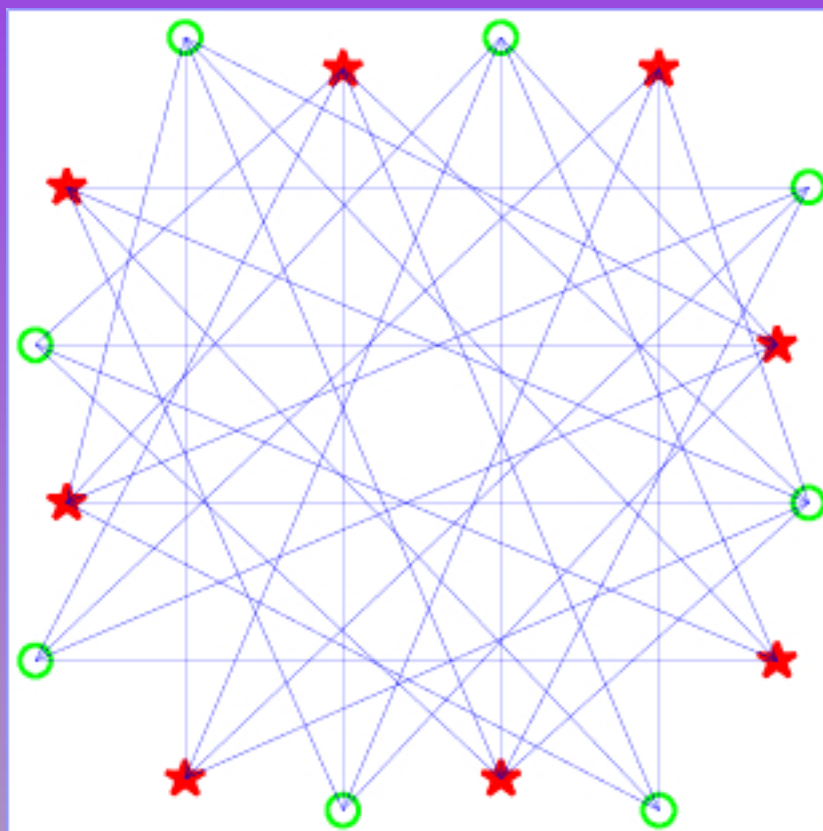


Tomografia sejsmiczna - linearyzacja

$$\mathbf{v}(x) \approx \mathbf{v}_o(x) + \delta \mathbf{v}(x)$$

$$\delta t_i^{th} = \sum_{j=1}^N \hat{G}_{ij} \delta v_j$$

Niejednoznaczność w tomografii sejsmicznej



Brakujące dane !!! $\Rightarrow$ **Potrzebne Informacje *a priori***

Technika optymalizacyjna: minimalizacja residuów

Residua:

$$r_i = t_i^{obs} - t_i^{th}$$

Szukamy

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_N)$$

$$||t_i^{obs} - t_i^{th}(\mathbf{v})|| + \lambda ||\mathbf{v} - \mathbf{v}^{apr}|| = \min$$

Technika Bayesowska: badamy rozkład *a posteriori*

Postulujemy:

$$\sigma(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v})L(\mathbf{v})$$

$$L(\mathbf{v}) = \exp \left(-||t_i^{obs} - t_i^{th}(\mathbf{v})|| \right)$$

$$f(\mathbf{v}) = \exp \left(-||\mathbf{v} - \mathbf{v}^{apr}|| \right)$$

Technika algebraiczna (Backus & Gilbert)

❖ tomografia liniowa

$$\mathbf{d} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{v}$$

❖ l_2 - metoda najmniejszych kwadratów

$$\mathbf{v}^{ML} = \mathbf{v}_{apr} + \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{C}_D^{-1} \cdot (\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{v}_{apr})$$

gdzie

$$\mathbf{H} = \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{C}_D^{-1} \cdot \mathbf{G} + \mathbf{C}_M^{-1}$$

❖ dane niezaburzone szumem

$$\mathbf{d}_{obs} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{v}_{true}$$

Macierz rozdzielczości

$$\mathbf{v}^{ML} - \mathbf{v}_{apr} = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{v}_{true} - \mathbf{v}_{apr})$$

$$\mathbf{R} = \left\{ \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{C}_D^{-1} \cdot \mathbf{G} + \mathbf{C}_M^{-1} \right\}^{-1} \cdot \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{C}_D^{-1} \cdot \mathbf{G}$$

Macierz rozdzielczości cd.

$$\mathbf{C}_D = \sigma_D^2 \mathbf{I} \quad \mathbf{C}_D = \sigma_M^2 \mathbf{I} \quad \gamma = \sigma_D / \sigma_M$$

$$\mathbf{R} = (\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{G} + \gamma^2 \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{G}$$

Macierz rozdzielczości: własności

❖ Przypadek idealny: $\mathbf{R} \approx \mathbf{I}$

nigdy się nie zdarza, - zawsze za mało danych ! $d_{obs}^i \quad i = 1 \dots N_{obs}$

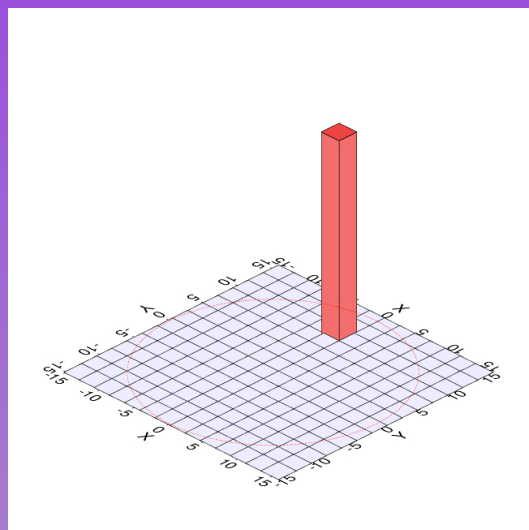
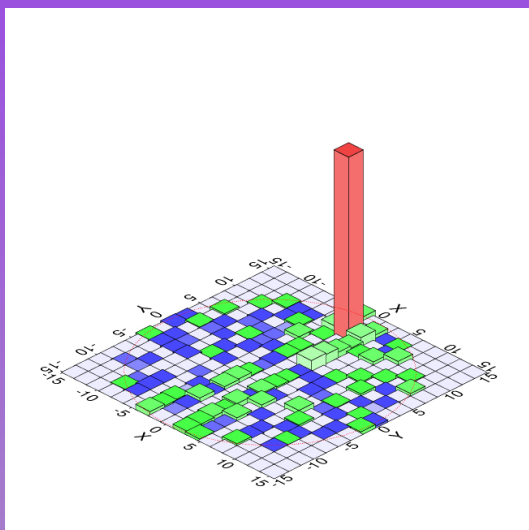
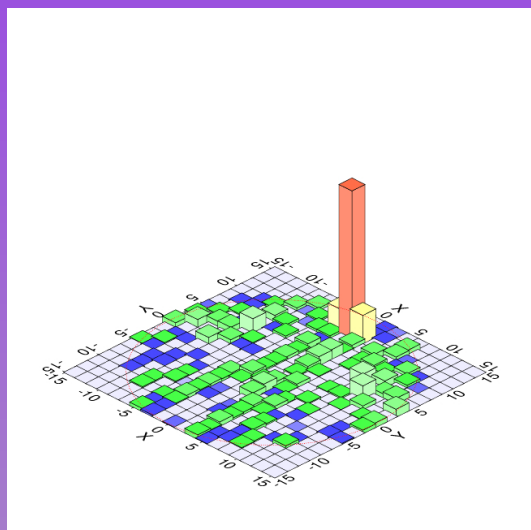
❖ Elementy diagonalne:

$$0 \leq \mathbf{R}_{ii} \leq 1$$

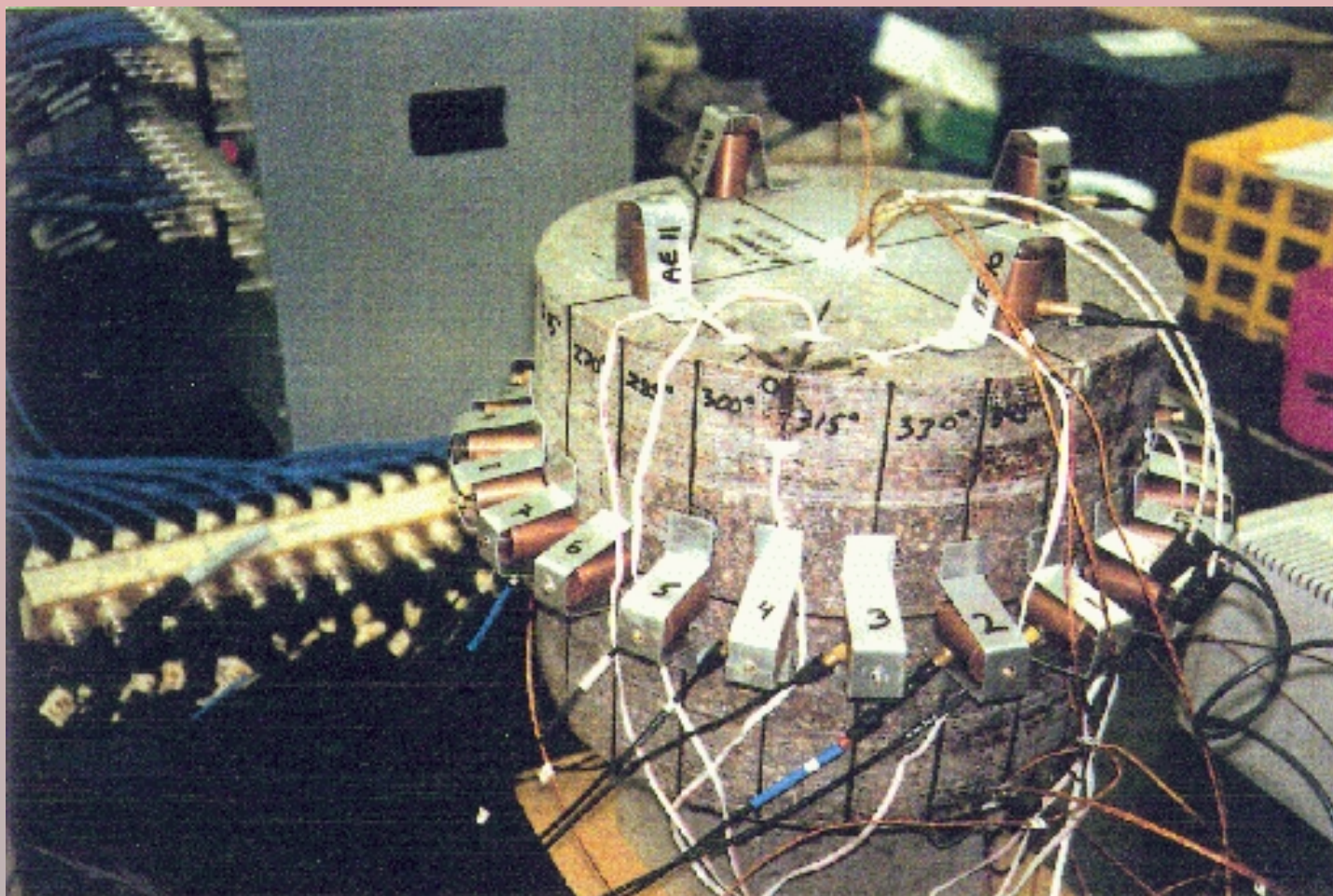
❖ Gdy dyskretyzacja prostokątnymi komórkami $\mathbf{R}$ jest a 2-D macierzą $N_{cell} \times N_{cell}$

❖ jeśli nie ma promieni w danej komórce to $\mathbf{R}_{ii} = 0$

Macierz rozdzielczości: przykład



Tomografia ultradźwiękowa próbki skalnej



QC1: Trzy warianty tomografii

1.

$$t^{th} = \int_{ray} \frac{ds}{v(s)}$$

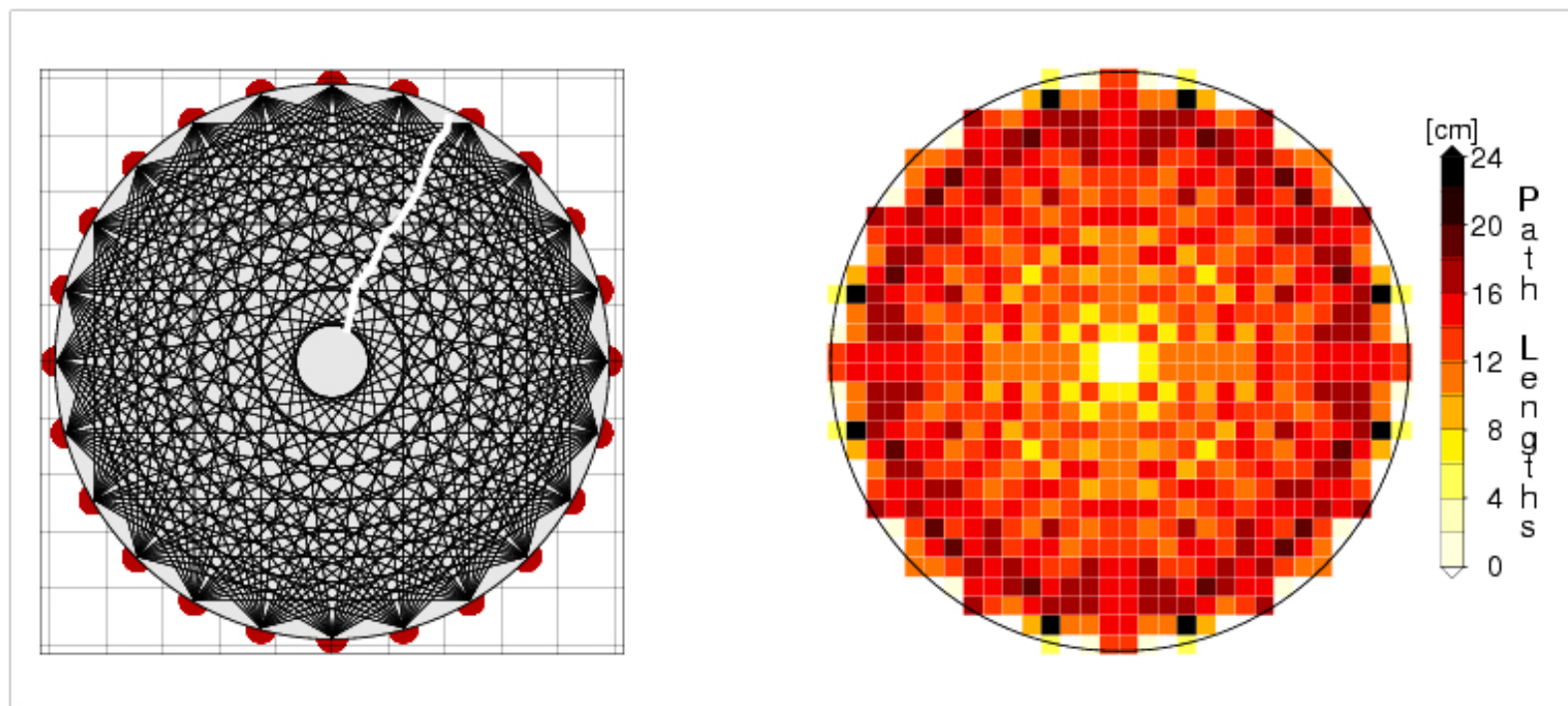
2.

$$t_{peak} = t_o + \int_{ray} \frac{ds}{v_t(s)} \quad \text{gdzie} \quad v_t = v \frac{Q}{Q + C}$$

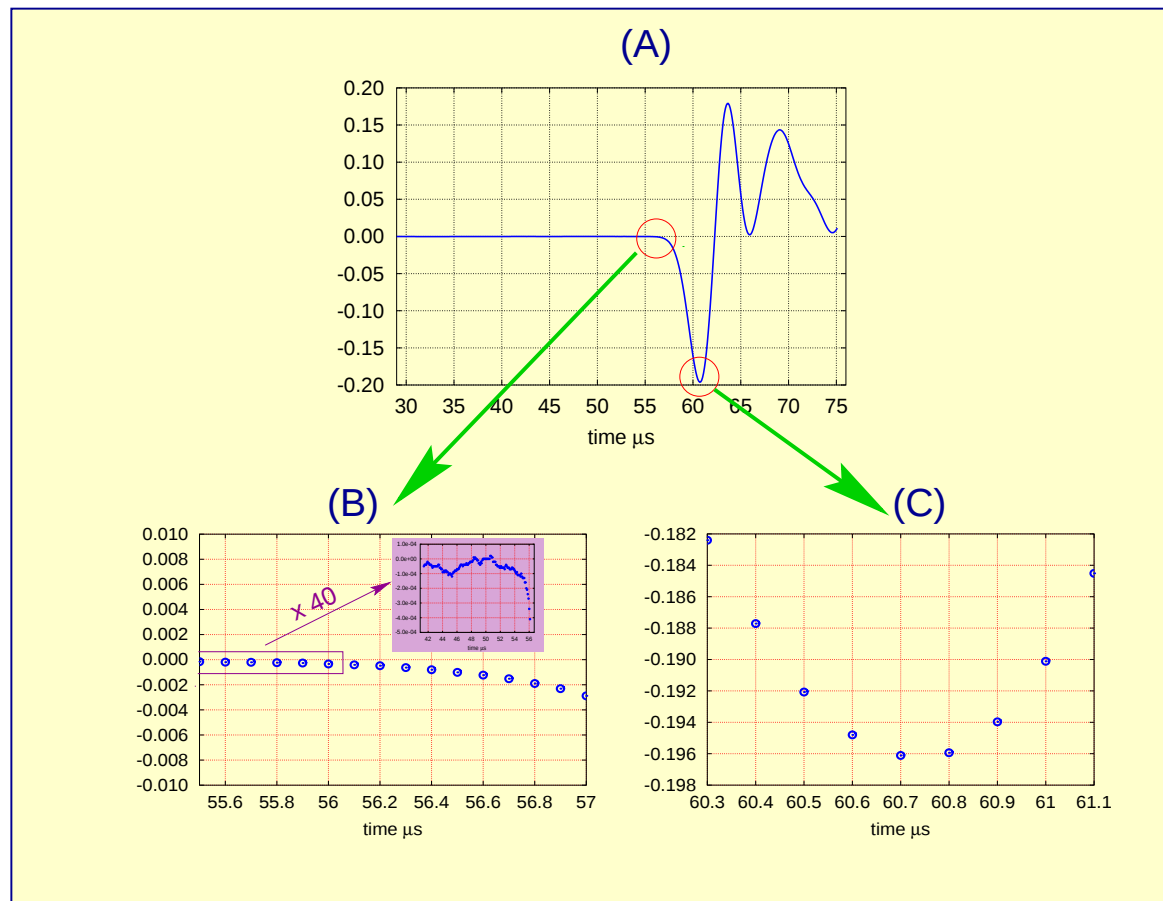
3.

$$t_{rt} = t_o + C \int_{ray} \frac{ds}{Q(s)v(s)}$$

QC1: konfiguracja pomiarowa

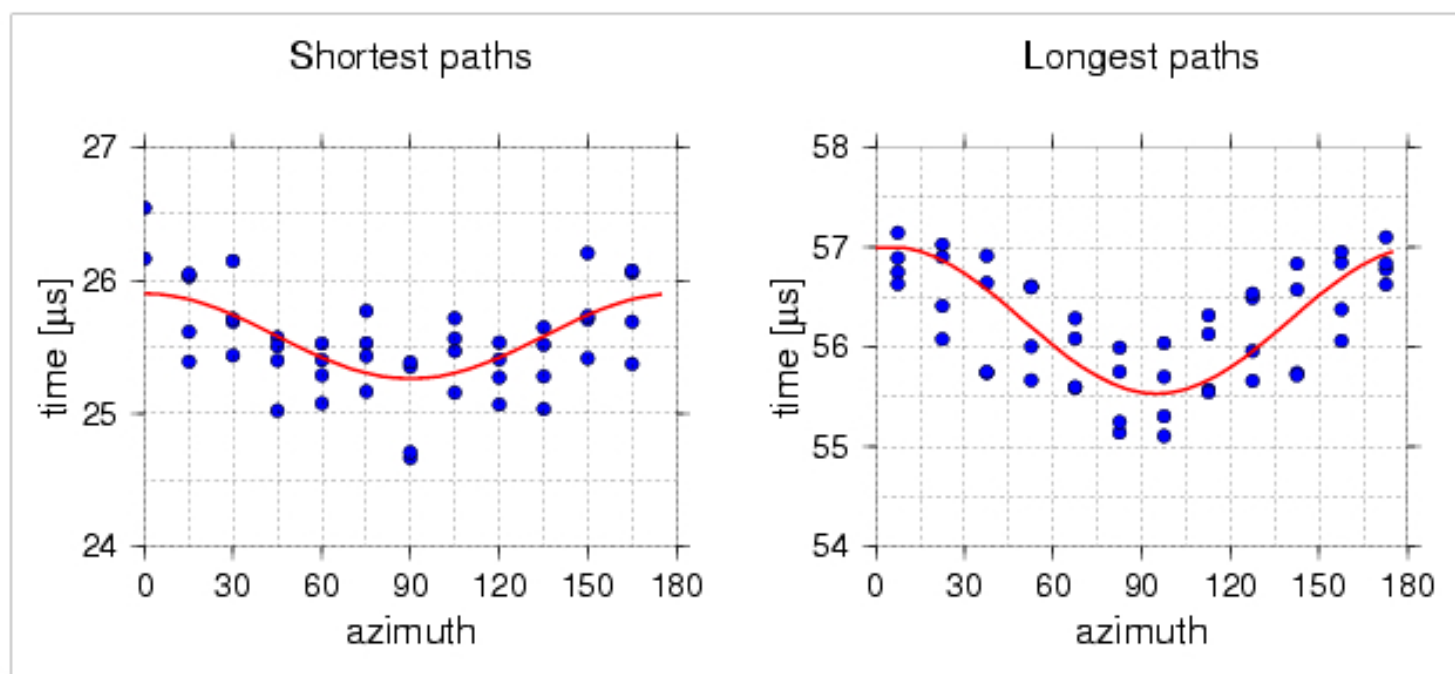


QC1: dane pomiarowe



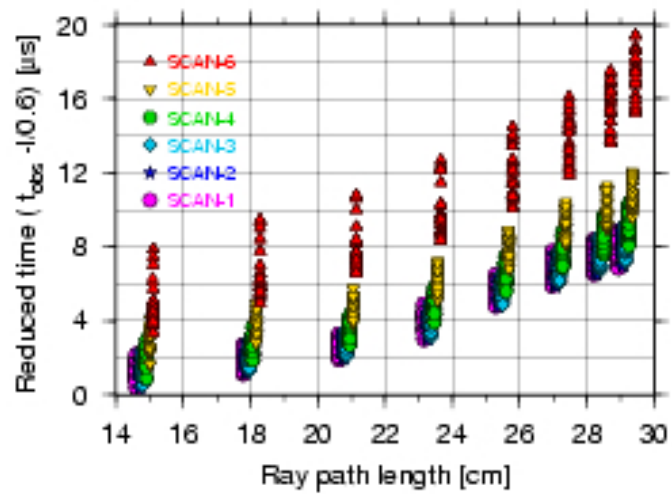
QC1: wstępna obróbka danych

Arrival times

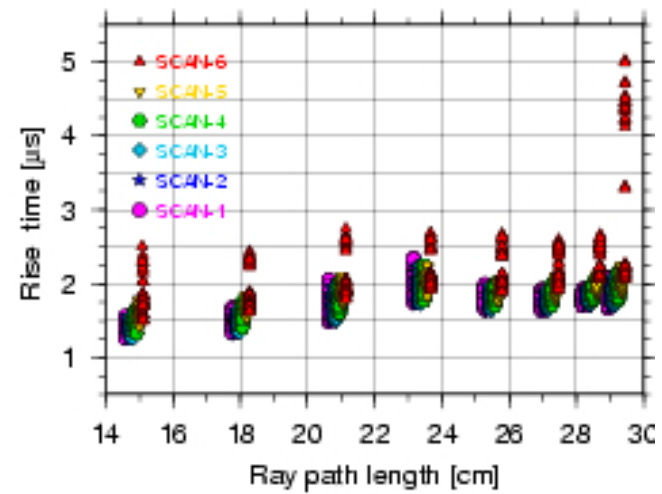


QC1: dane pomiarowe

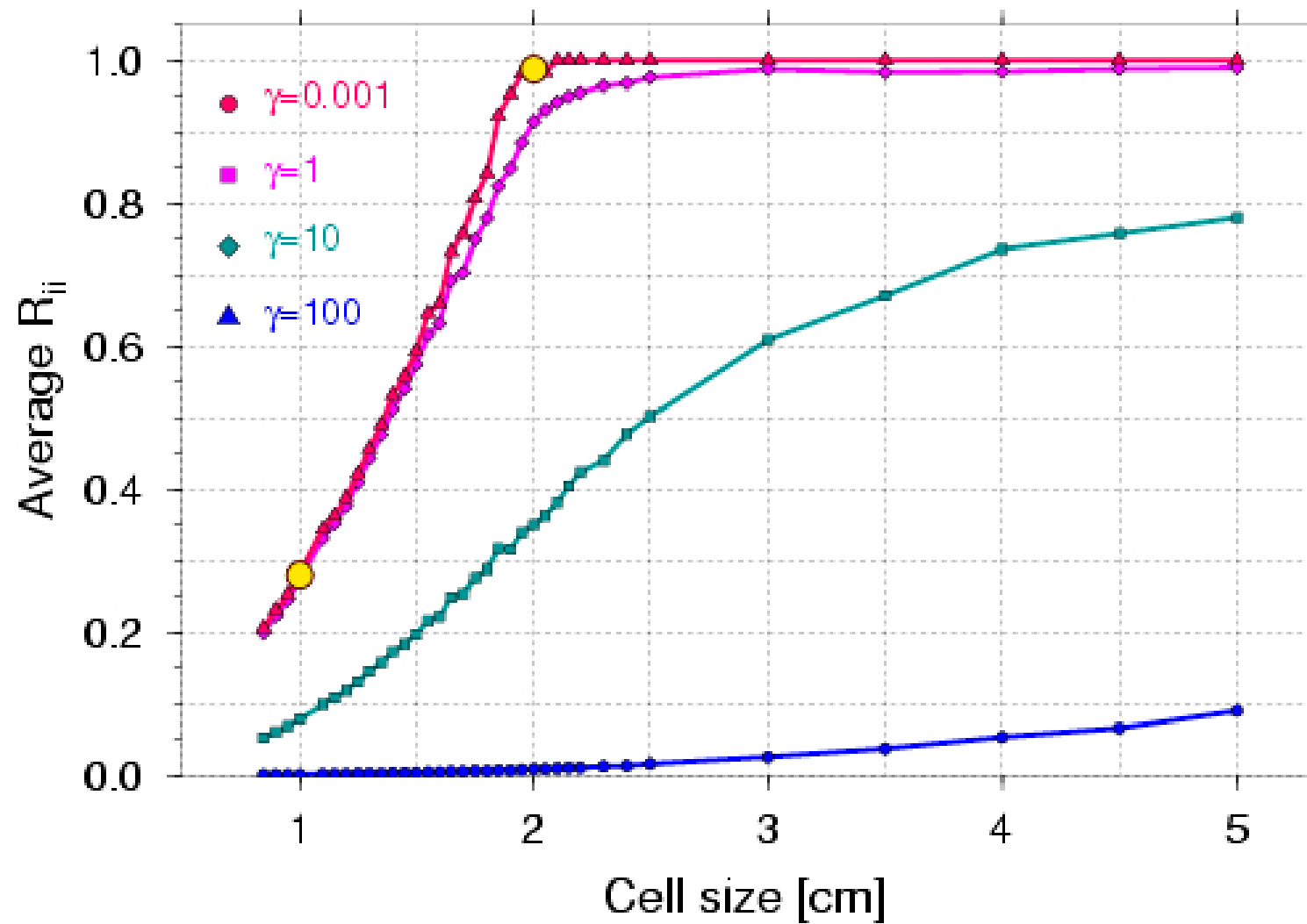
First Arrival



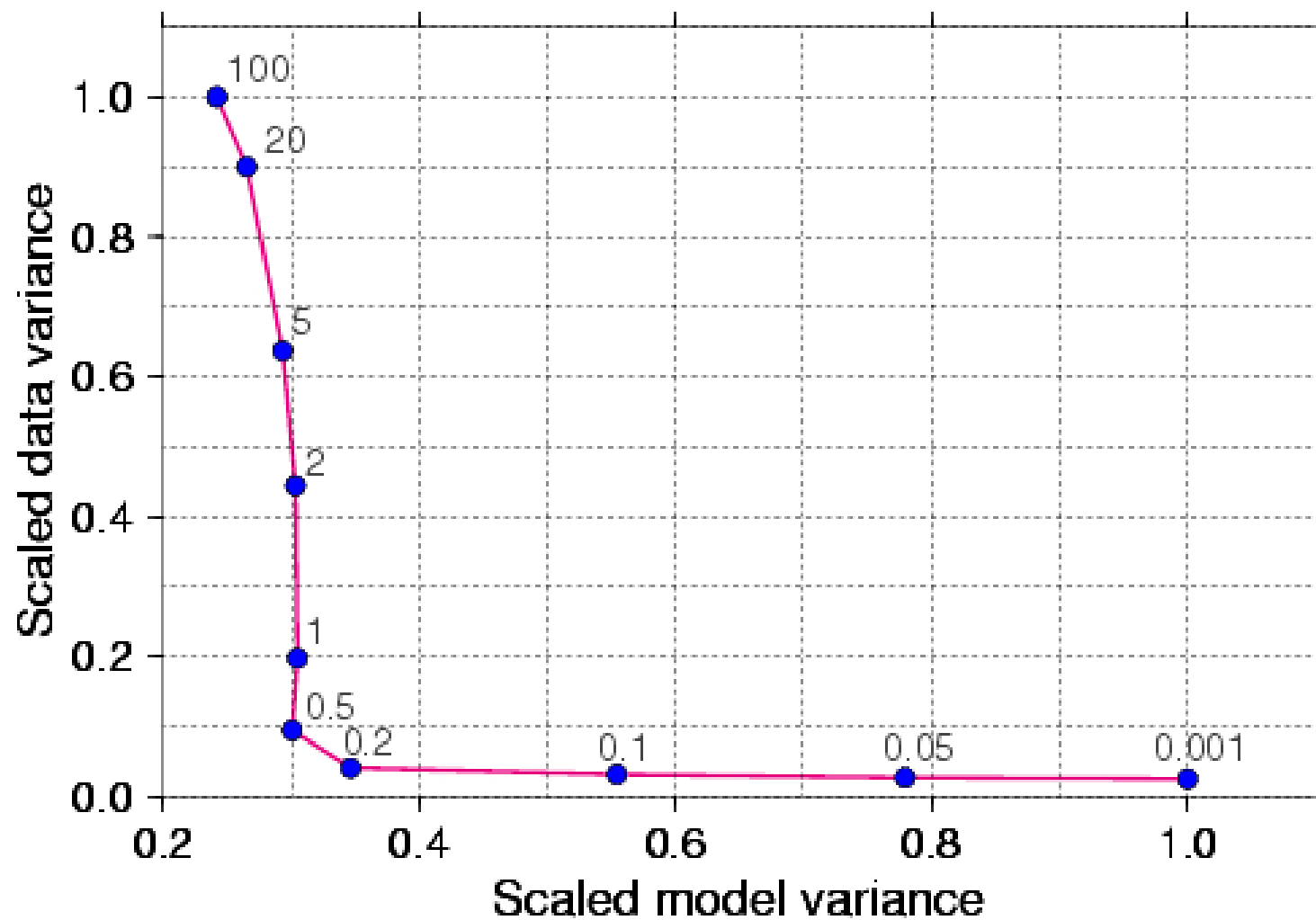
Rise Time



QC1: dyskretyzacja

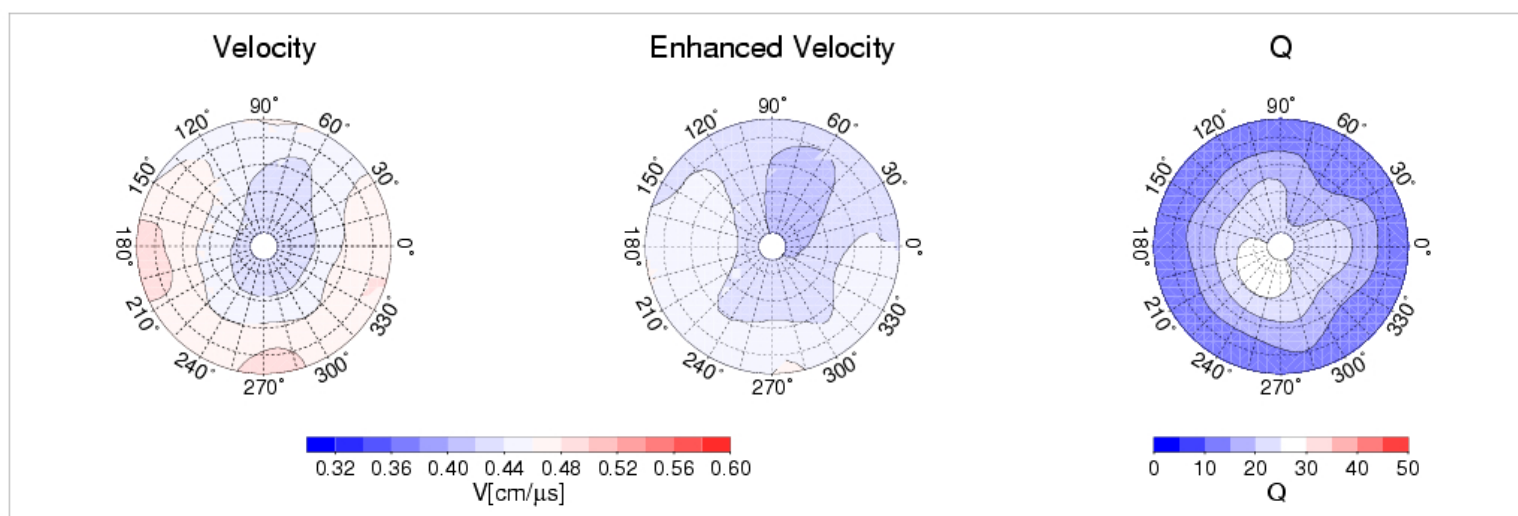


QC1: tłumienie optymalne

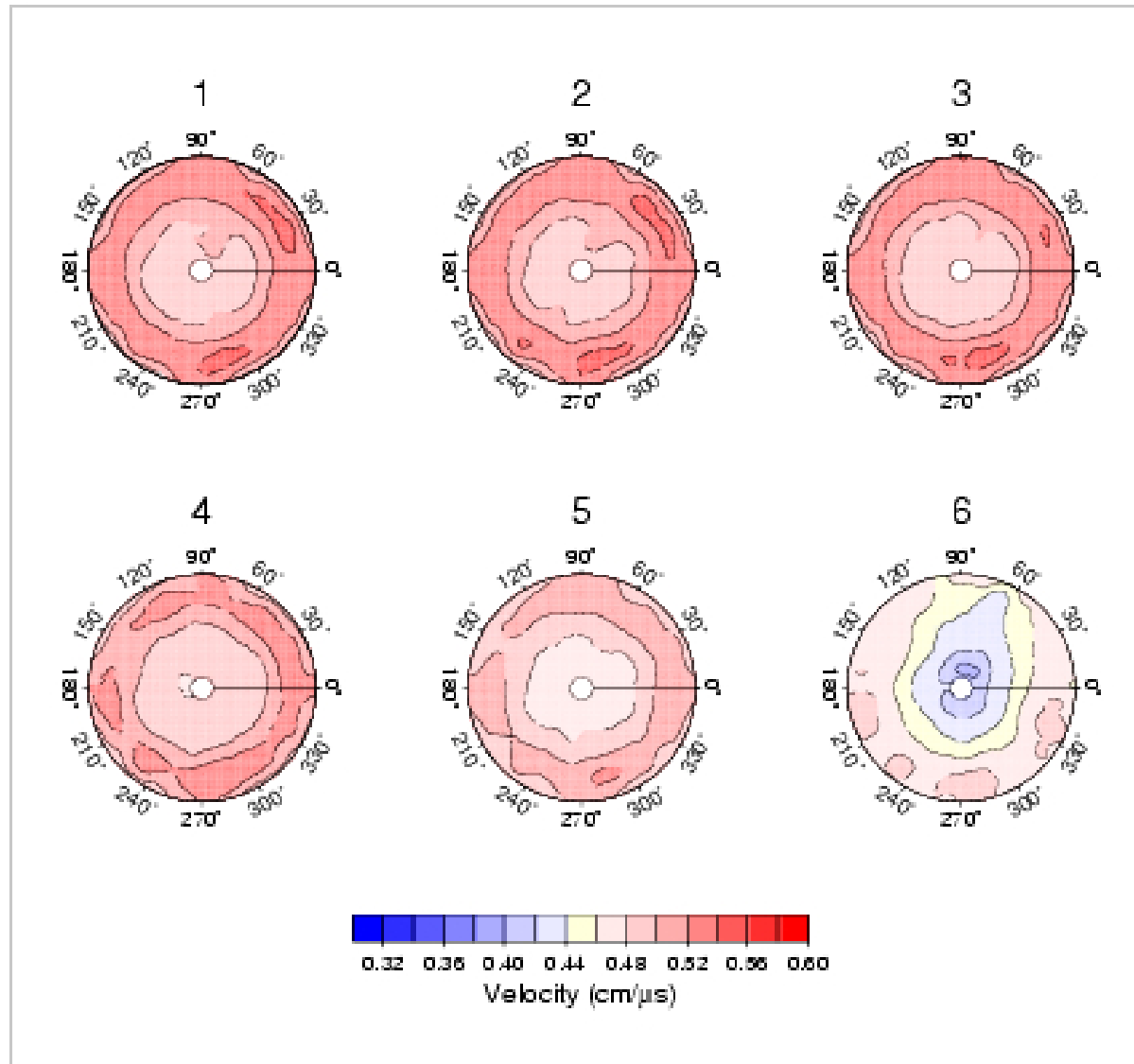


QC1: Inwersja 2-stopniowa

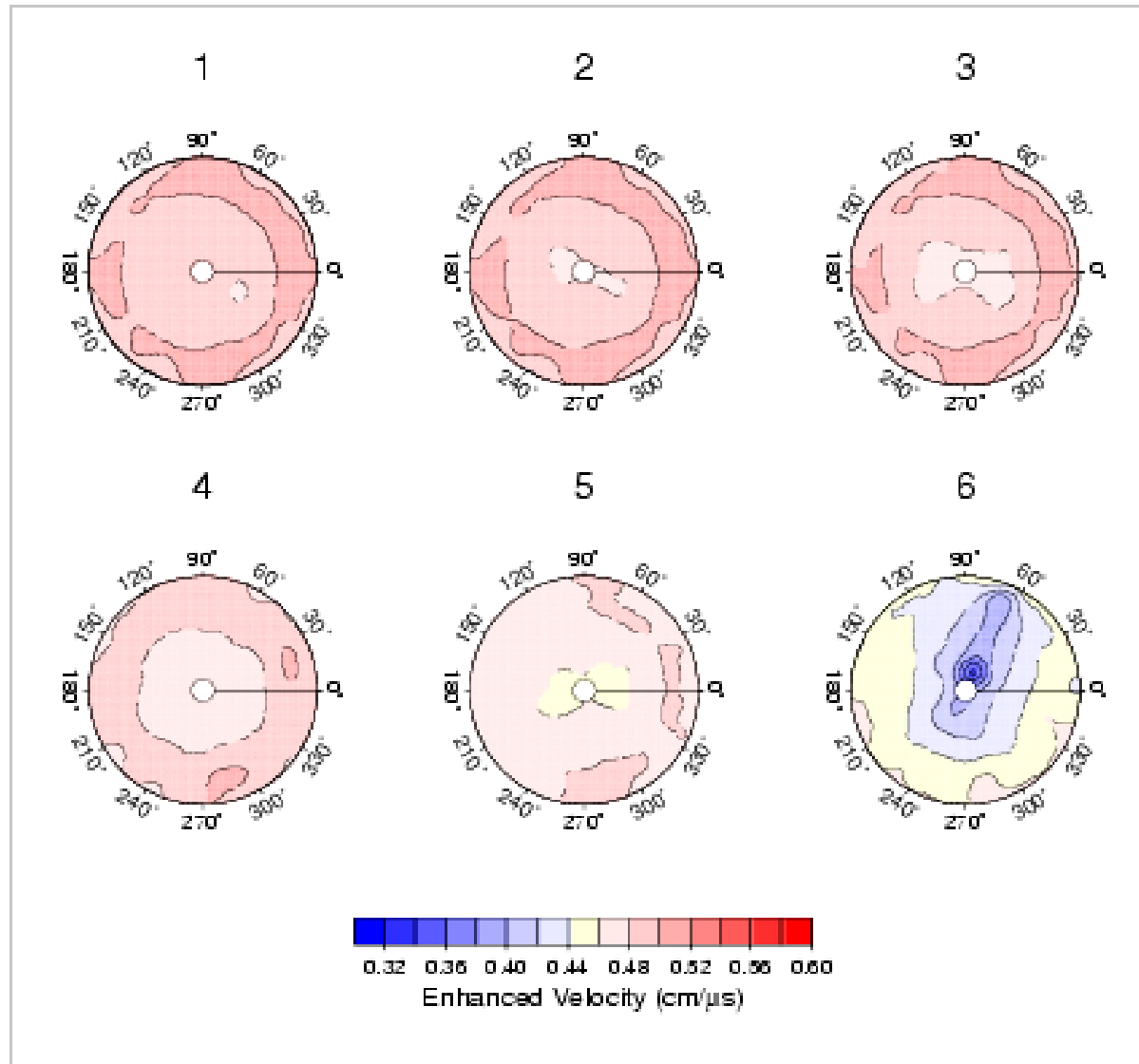
A priori models



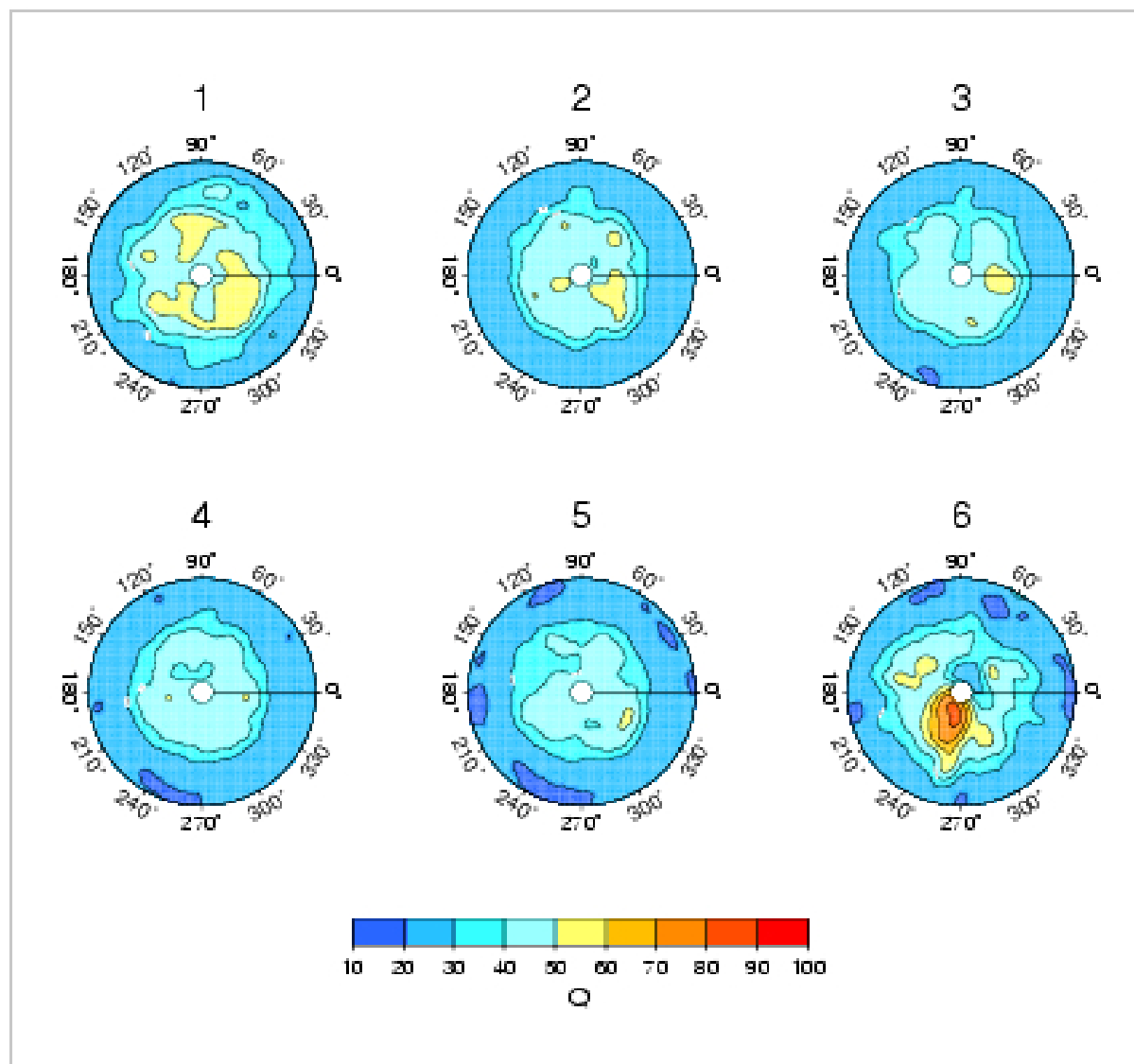
QC1: tomografia prędkościowa



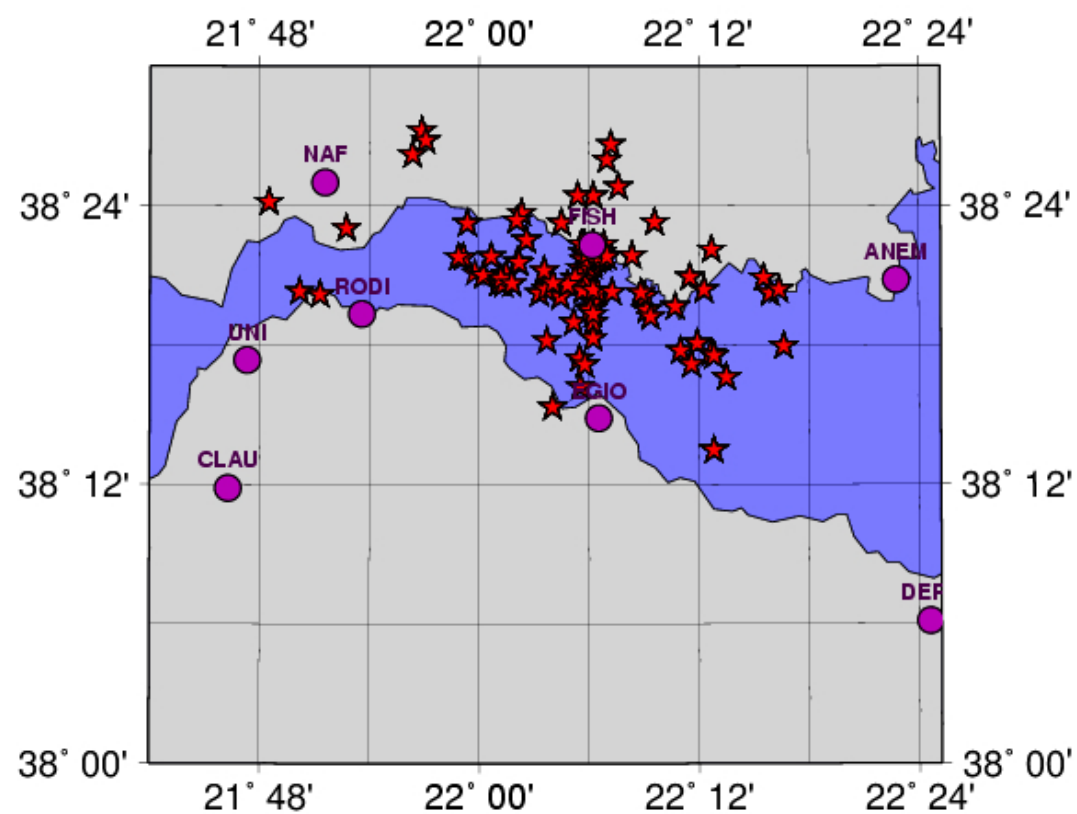
QC1: tomografia “ulepszona”



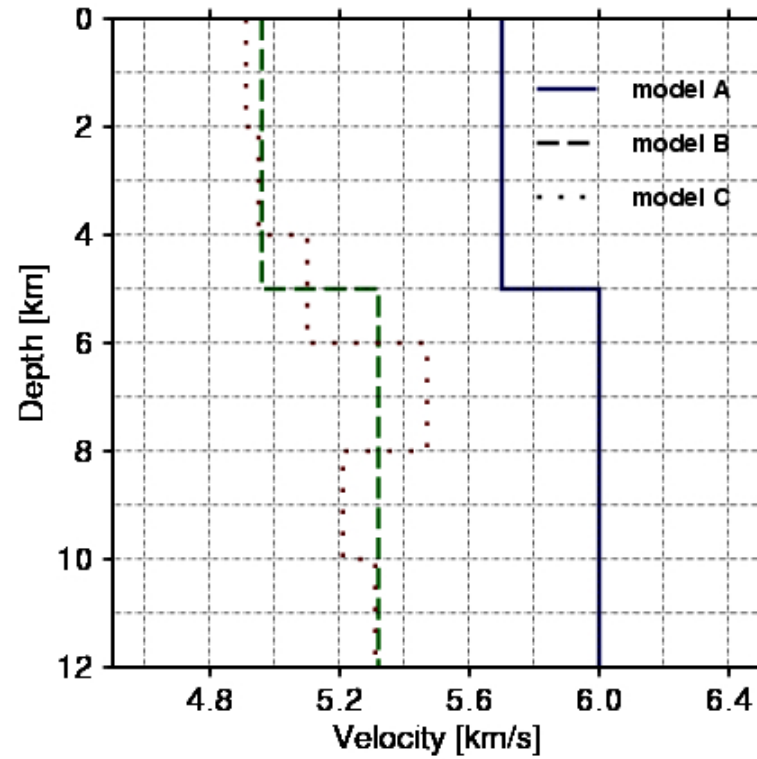
QC1: tomografia tłumieniowa



Zatoka Koryncka: rozkład stacji i wstrząsów

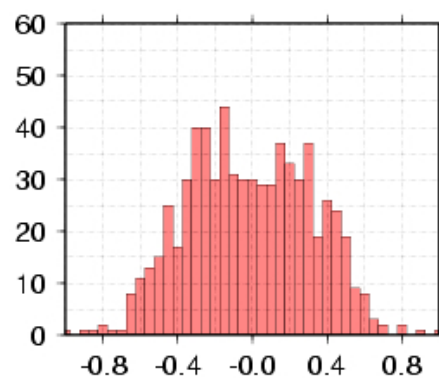


Zatoka Koryncka: modele wyjściowe (1D)

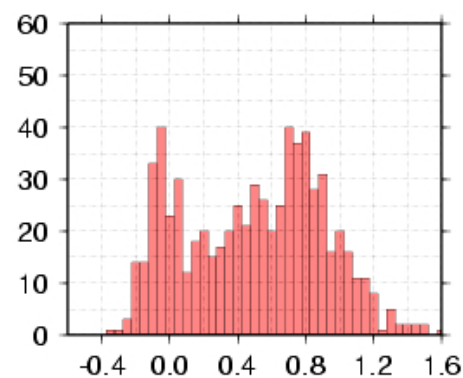


Zatoka Koryncka: residua dla modeli 1D

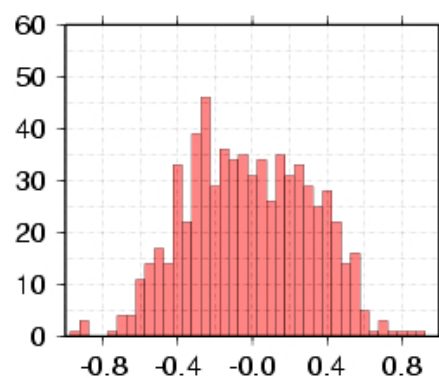
Model *a priori*



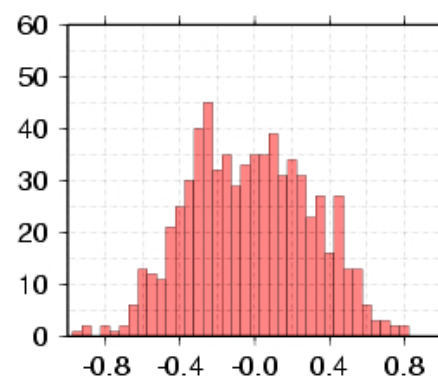
Model A



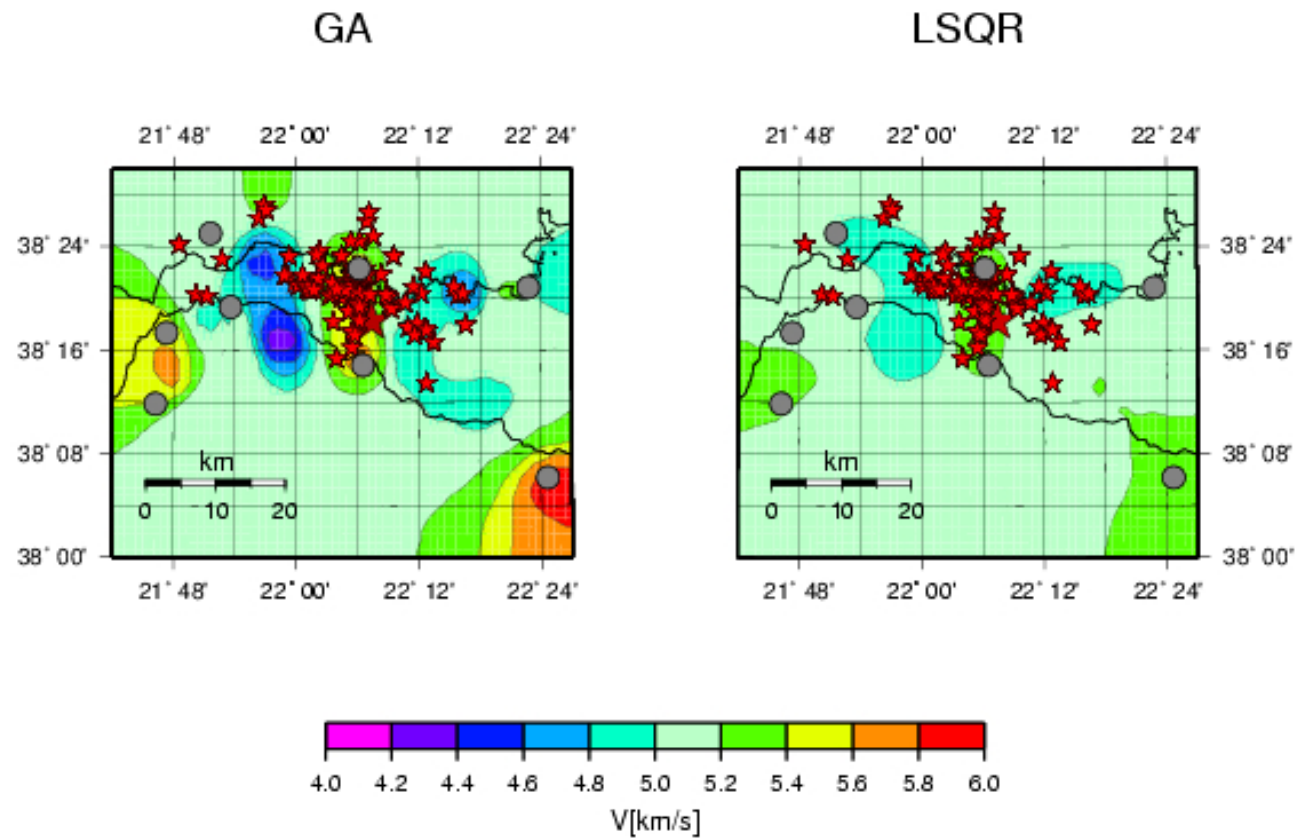
Model B



Model C



Zatoka Koryncka: rozwiązanie 2D



Zatoka Koryncka: residua dla modeli 2D

