

Problemy odwrotne w geofizyce (L3)

Wojciech Dębski

debski@igf.edu.pl

www.igf.edu.pl/~debski

Plan wykładu

- Konstrukcja rozkładu *a posteriori* - podejście Tarantoli
 - ★ koniunkcja informacji
 - ★ rozkład opisujący stan “nic nie wiemy”
 - ★ rozkład *aposteriori* w przestrzeni $\mathbf{M} \times \mathbf{D}$
- Funkcja podobieństwa (ang. likelihood function) - interpretacja
 - ★ dokładne dane pomiarowe
 - ★ dokładne przewidywania teoretyczne
 - ★ błędy statystycznie niezależne
 - ★ problem liniowy i gausowskie błędy
- Rozkład *a priori* i jego rola
 - ★ brak danych pomiarowych
 - ★ brak teorii
- Ilustracje rozkładów *a posteriori*
- Podejście Bayesowskie i optymalizacyjne - czym się różnią

Transformacje rozkładów prawdopodobieństwa (A)

- X, Y - zmienne losowe (parametry)
- $p(x)$ - znany rozkład
- $y = f(x)$

$$q(y) = ???$$

Rozwiązanie:

A - dowolny podzbiór wartości X

$B = f(A)$ - obraz A

Transformacja pdf (B)

$$P_X(A) = P_Y(B)$$

$$\int_A p(x) dx = \int_B q(y) dy$$

$$y = y(x) \implies dy = \left| \frac{dy(x)}{dx} \right| dx$$

$$x = x(y) \implies dx = \left| \frac{dx(y)}{dy} \right| dy$$

Transformacja pdf (C)

$$\int_A p(x) dx = \int_A q(y(x)) \left| \frac{dy(x)}{dx} \right| dx$$

$$\int_B p(y(x)) \left| \frac{dx(y)}{dy} \right| dy = \int_B q(y) dy$$

$$q(y) = p(x) \left| \frac{dx(y)}{dy} \right|_{x=x(y)}$$

Postulat Tarantoli

Dwa rozkłady opisujące dwie różne informacje

1. $p(d)$
 2. $q(d)$
-

$$\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p}(\mathbf{x}) \mathbf{q}(\mathbf{x})}{\mu(\mathbf{x})}$$

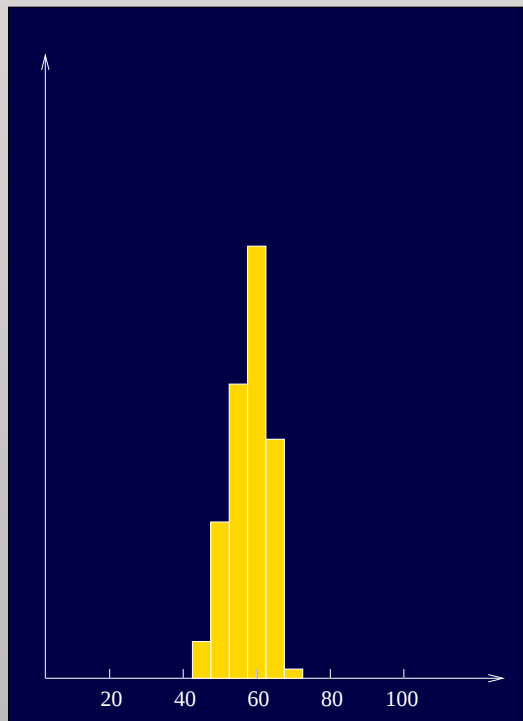
Opisuje **łączne** posiadane informacje

Przykład łączenia informacji (wnioskowania)

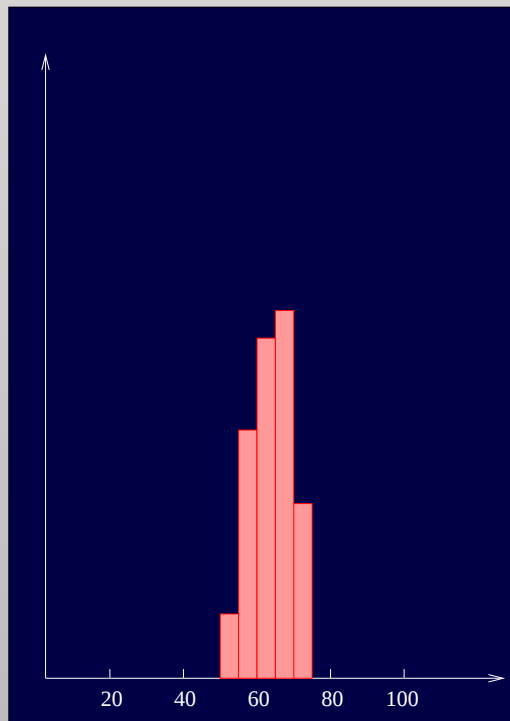


Przykład cd.

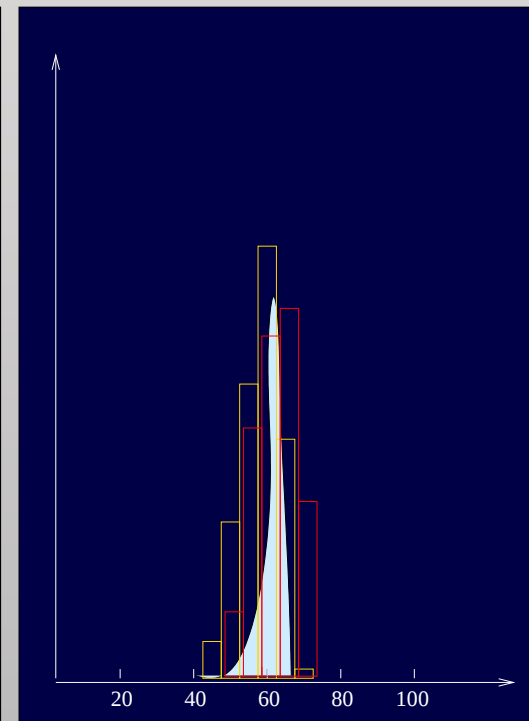
$$\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p}(\mathbf{x}) \mathbf{q}(\mathbf{x})}{\mu(\mathbf{x})}$$



$p(x)$



$q(x)$



$p \wedge q(x)$

Rozkład jednorodny (A)

Niech $\mathbf{X}$ zmienna losowa: $-\infty < x_i < \infty$

Postulat Gaussa: jeśli żadna z wartości nie jest wyróżniona to dla dowolnego podzbioru A wartości

$$P_n(A) \sim \text{vol}(A)$$

czemu odpowiada rozkład jednorodny

$$P_n(A) = \int_A \mu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_A dV$$

współ. kartezjańskie: $dV = dx_1 dx_2 \cdots dx_N$

$$\mu(x) = \text{const.}$$

Rozkład jednorodny (B)

Lokalizacja hipocentrum trzęsienia ziemi

współ. kartezjańskie: $\mu(x, y, z) = \text{const.}$

współ. geograficzne:

$$\mu(r, \theta, \phi) = \mu(x, y, z) \times \underbrace{\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} \right|}_{r^2 \sin(\theta)}$$

$$\mu(r, \theta, \phi) = r^2 \sin(\theta)$$

$\mu()$ **nie musi** być stałą funkcją

Jak dużo wiemy ...

informacje $\Longleftrightarrow$ rozkład prawdopodobieństwa

“Jak dużo” informacji reprezentuje dany $p(x)$?

$$I(p) = \int_X p(x) \log \frac{p(x)}{\mu(x)} dx$$

Jak dużo wiemy ...

przykład:

$$p(x) = e^{-x^2/(2\sigma_p^2)}$$

$$q(x) = e^{-x^2/(2\sigma_q^2)}$$

$$\mu(x) = \text{const}$$

$$I(p) = a + \ln \left(\frac{1}{\sigma_p} \right)$$

$$I(p) - I(q) = \ln \left(\frac{\sigma_q}{\sigma_p} \right)$$

Rozwiązanie problemu inwersyjnego

1. obserwacje: $p(\mathbf{d}) \longrightarrow p(\mathbf{d})\mu_M(\mathbf{m})$
 2. teoria : $q(\mathbf{m}, \mathbf{d})$
 3. *a priori* : $f(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = f_M(m)f_D(\mathbf{d})$
-

$$(p \wedge q)(\cdot) = \frac{p(\cdot) q(\cdot)}{\mu(\cdot)}$$

Rozkład *A posteriori pdf* na $\mathbf{M} \times \mathbf{D}$

Trzy kroki:

1. Uogólnienie wszystkich rozkładów na przestrzeń $\mathbf{M} \times \mathbf{D}$
2. Utworzenie uogólnionej funkcji podobieństwa:

$$\mathcal{L}(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = (p \wedge q)(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = \frac{p(\mathbf{m}, \mathbf{d}) q(\mathbf{m}, \mathbf{d})}{\mu(\mathbf{m}, \mathbf{d})}$$

3. utworzenie rozkładu *A posteriori*:

$$\sigma(m, d) \approx (\mathcal{L} \wedge f)(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = \frac{\mathcal{L}(\mathbf{m}, \mathbf{d}) f(\mathbf{m}, \mathbf{d})}{\mu(\mathbf{m}, \mathbf{d})}$$

Brzegowe rozkłady *A posteriori*

$$\sigma_m(m) = \int_D \sigma(m, d) dD$$

$$\sigma_d(d) = \int_M \sigma(m, d) dM$$

A posteriori pdf

$$\sigma_m(m) = f(m) \cdot L(m, d^{obs})$$

$$L(\mathbf{m}, \mathbf{d}^{obs}) = \int_D p(\mathbf{d}, \mathbf{d}^{obs}) \frac{q(\mathbf{m}, \mathbf{d})}{\mu(\mathbf{m}, \mathbf{d})} d\mathbf{d}$$

Przykład - dokładna teoria

$$q(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = \delta(\mathbf{d} - \mathbf{G}(\mathbf{m}))\mu(\mathbf{m}, \mathbf{d})$$

wtedy

$$L(\mathbf{m}) = p(\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{G}(\mathbf{m}))$$

funkcja podobieństwa opisuje niepewność wyznaczenia $\mathbf{m}$ z względu na obecność błędów pomiarowych

Przykład - dokładne pomiary

$$p(\mathbf{d}, \mathbf{d}^{obs}) = \delta(\mathbf{d} - \mathbf{d}^{obs})\mu_D(\mathbf{d})$$

wtedy

$$L(\mathbf{m}) = q(\mathbf{d}^{obs}, \mathbf{G}(\mathbf{m}))$$

funkcja podobieństwa opisuje niepewność wyznaczenia $\mathbf{m}$ z względu na obecność błędów modelowania

Przykład - błędy Gausowskie

Wzorki na tablicy...

Przykład - brak danych pomiarowych

rola informacji *a priori*

$$L(\mathbf{m}) = \int_D p(\mathbf{d}) \frac{q(\mathbf{m}, \mathbf{d})}{\mu(\mathbf{m}, \mathbf{d})} d\mathbf{d}$$

jeśli

$$p(\mathbf{d}) = \mu(\mathbf{d})$$

$$L(\mathbf{m}) = \int_D p(\mathbf{d}) \frac{q(\mathbf{m}, \mathbf{d})}{\mu(\mathbf{m}, \mathbf{d})} d\mathbf{d} = \int_D \frac{q(\mathbf{m}, \mathbf{d})}{\mu(\mathbf{m})} d\mathbf{d} = \text{const.}$$

$$\sigma(\mathbf{m}) = f(\mathbf{m})$$

Przykład - brak informacji teoretycznych

rola informacji *a priori*

$$L(\mathbf{m}) = \int_D p(\mathbf{d}) \frac{q(\mathbf{m}, \mathbf{d})}{\mu(\mathbf{m}, \mathbf{d})} d\mathbf{d}$$

jeśli

$$q(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = \mu(\mathbf{m}, \mathbf{d})$$

$$L(\mathbf{m}) = \int_D p(\mathbf{d}) \frac{q(\mathbf{m}, \mathbf{d})}{\mu(\mathbf{m}, \mathbf{d})} d\mathbf{d} = \int_D p(\mathbf{d}) d\mathbf{d} = \text{const.}$$

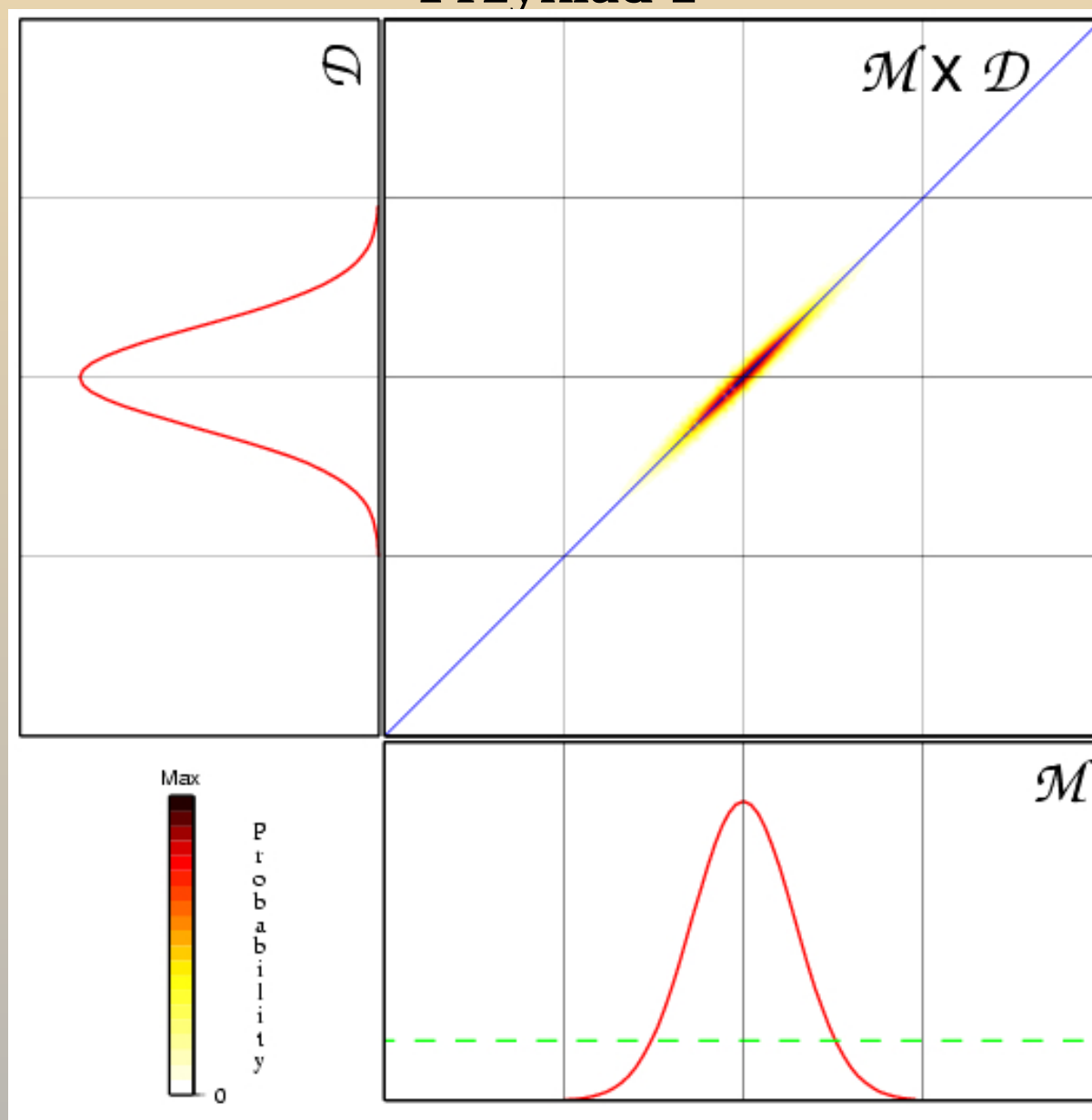
$$\sigma(\mathbf{m}) = f(\mathbf{m})$$

Rozkład *a priori*

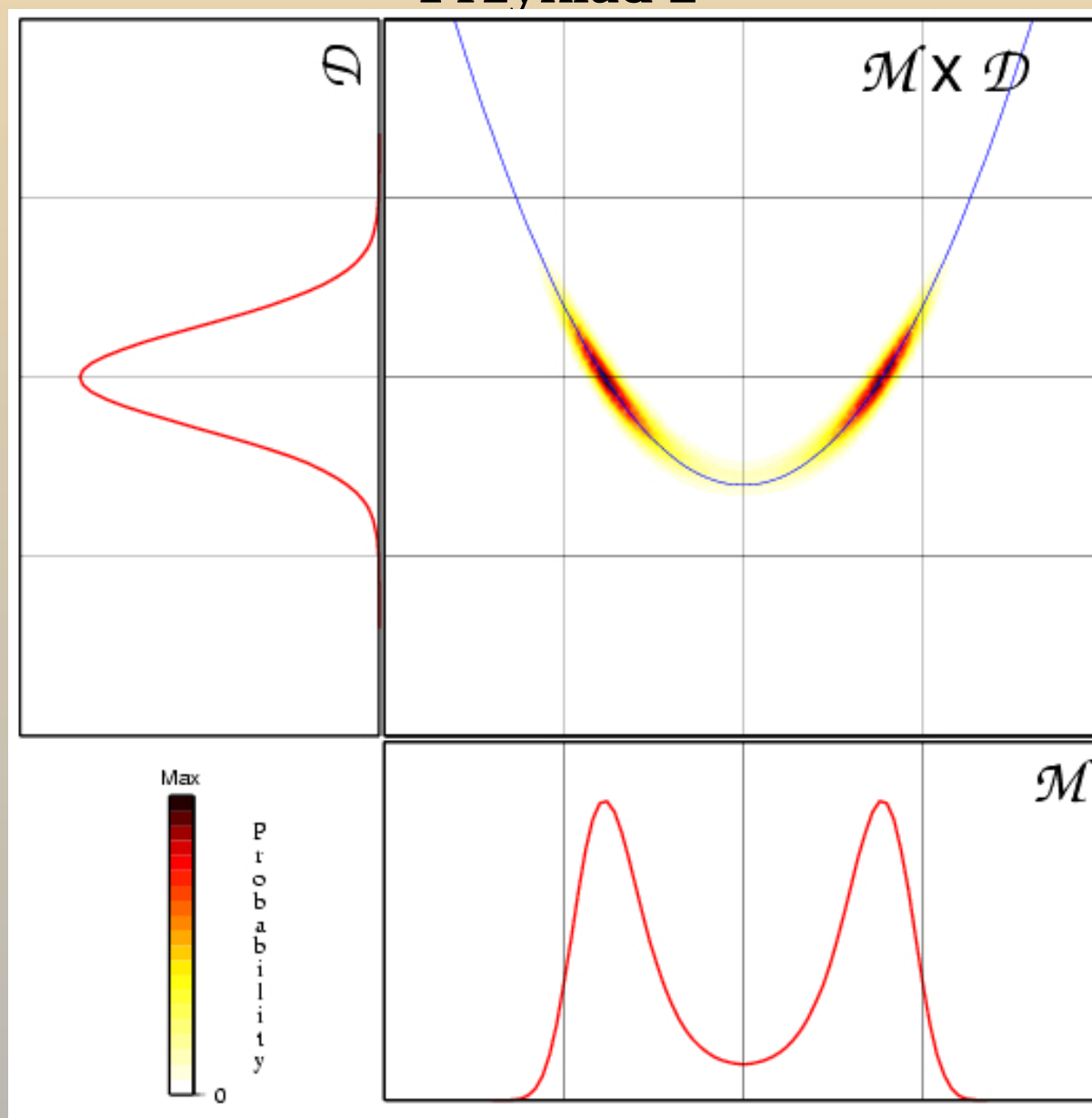
problem niejednoznaczności rozwiązania

Opisać zagadnienie niejednoznaczności

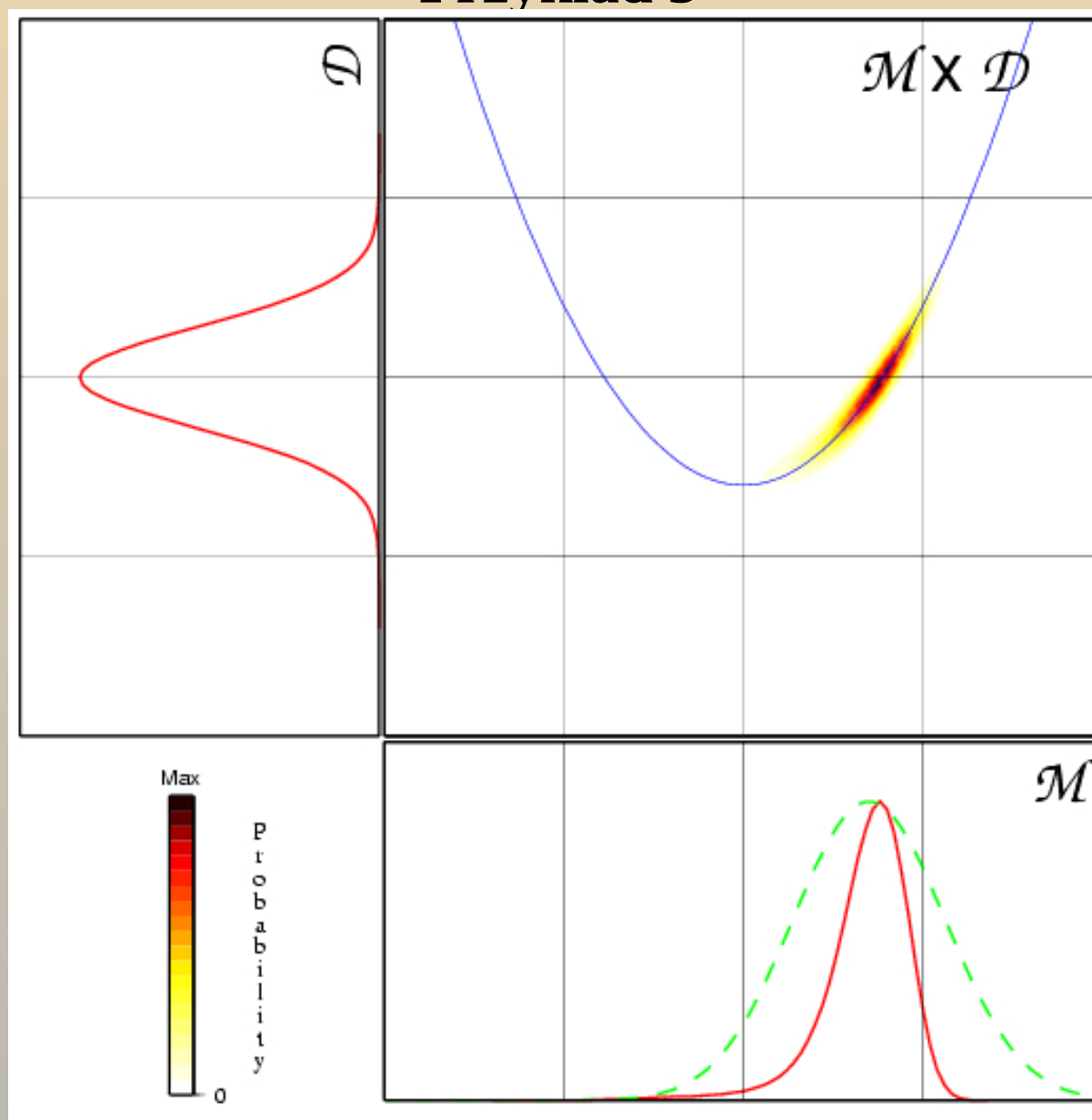
Przykład 1



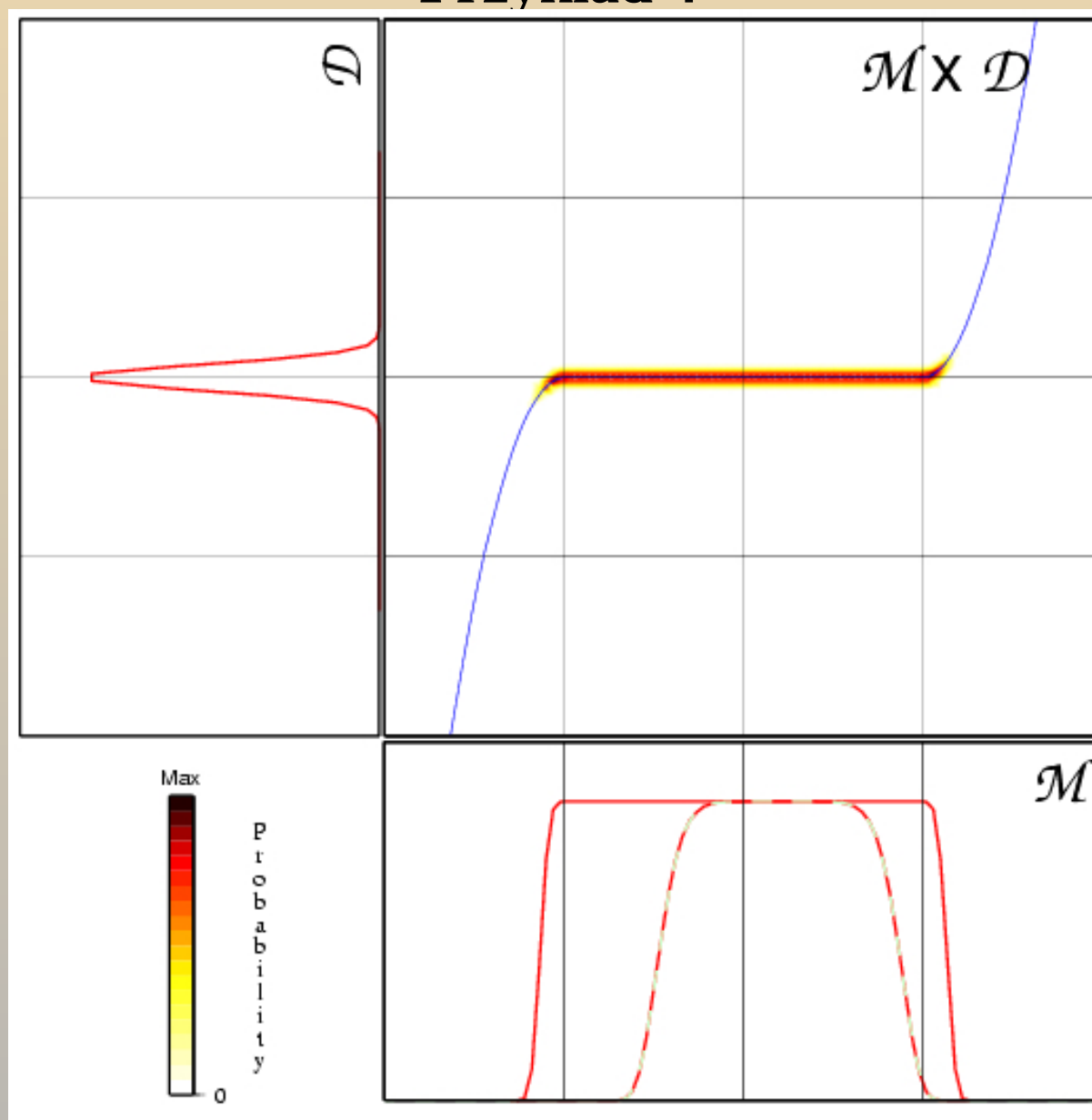
Przykład 2



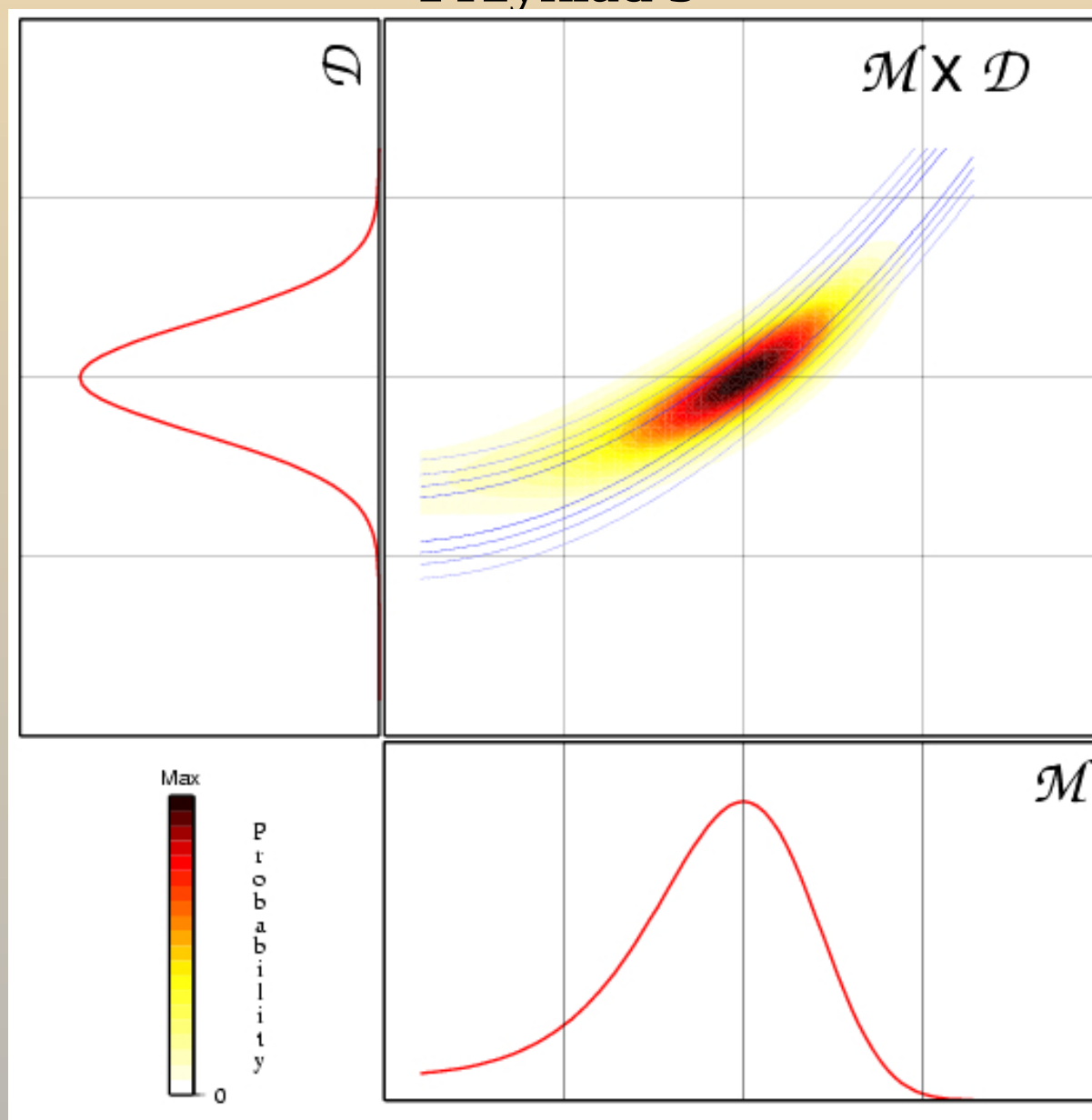
Przykład 3



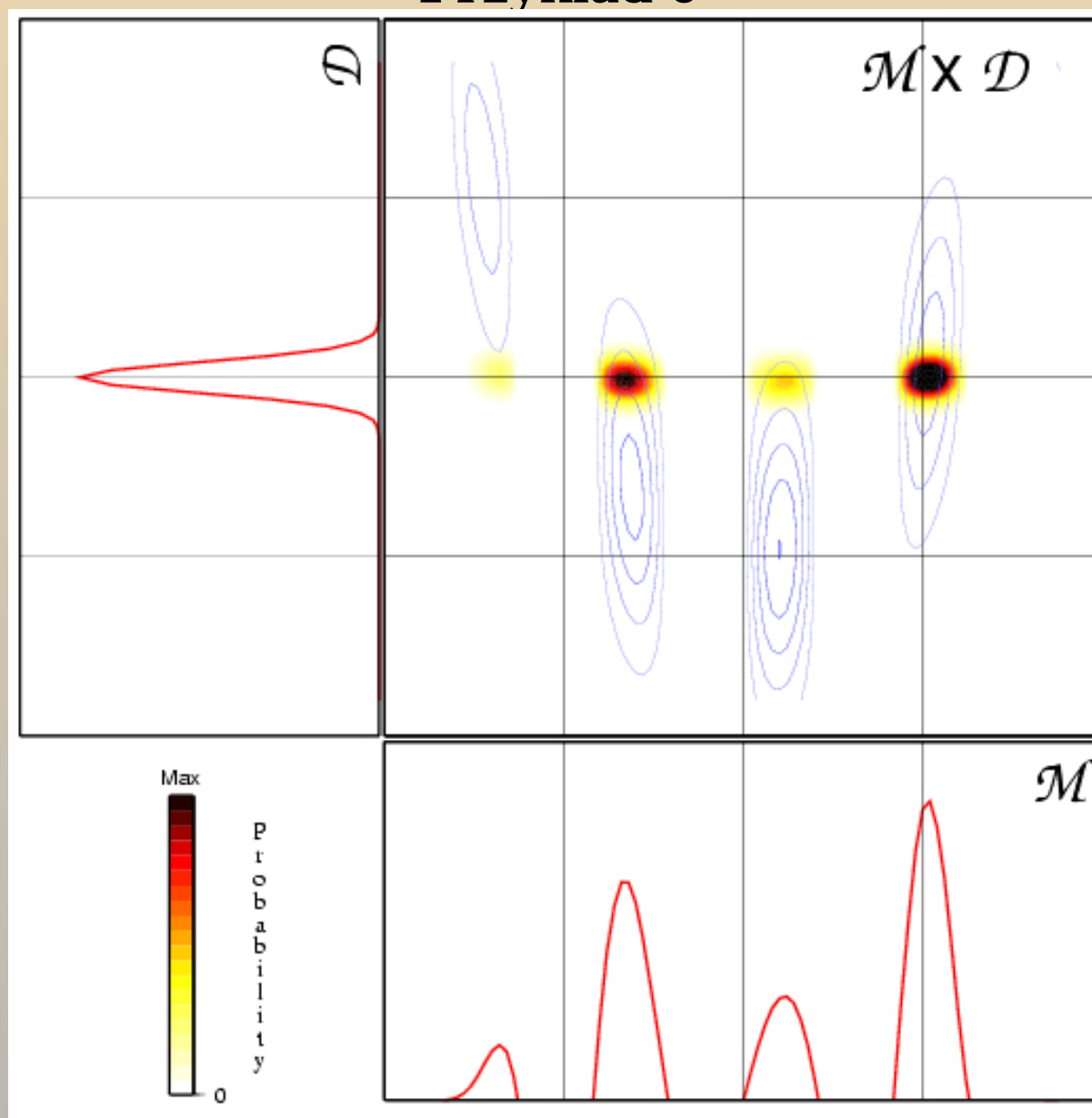
Przykład 4



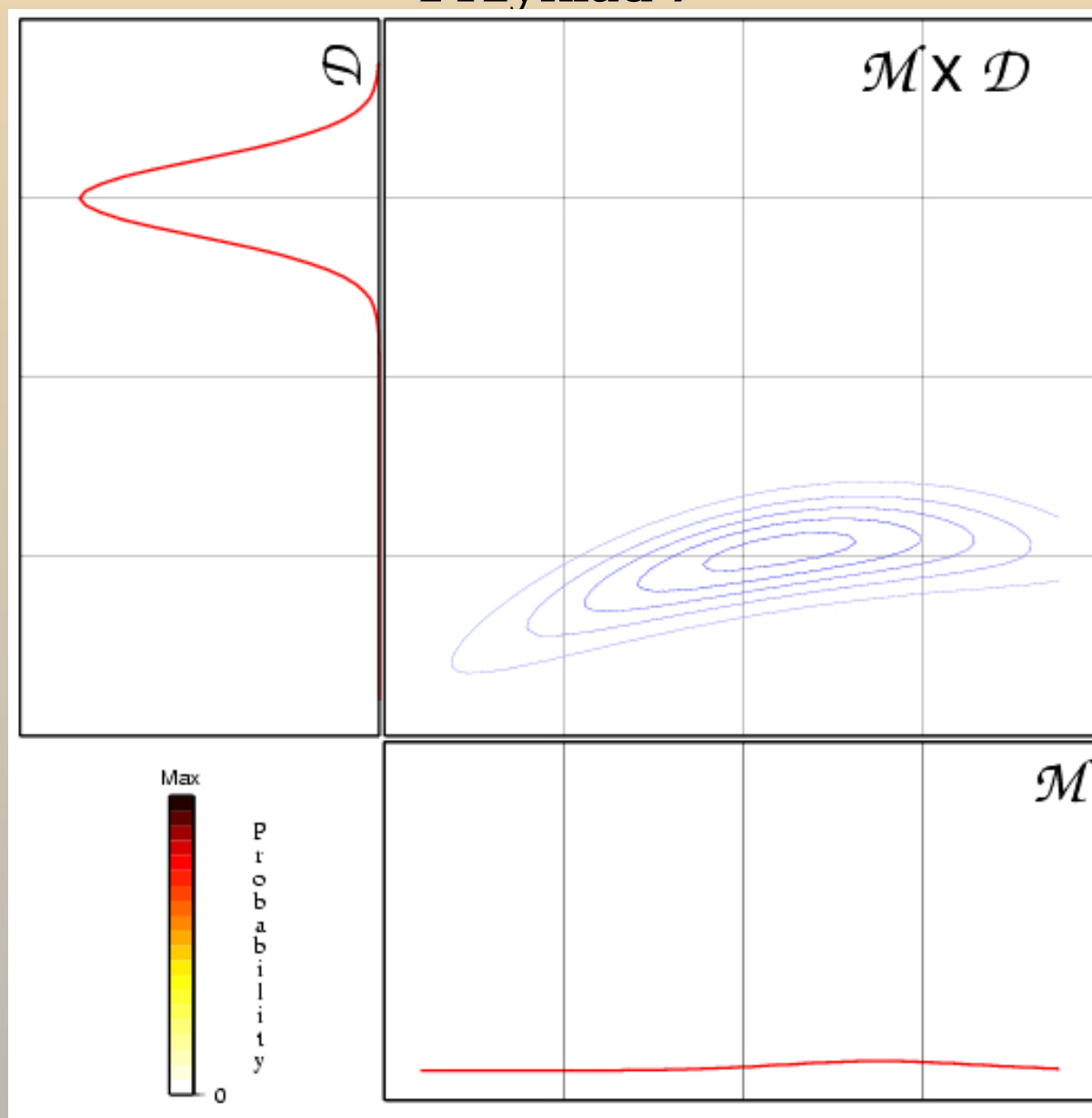
Przykład 5



Przykład 6



Przykład 7



Przykład 8

