

Problemy odwrotne w geofizyce (L2)

Wojciech Dębski

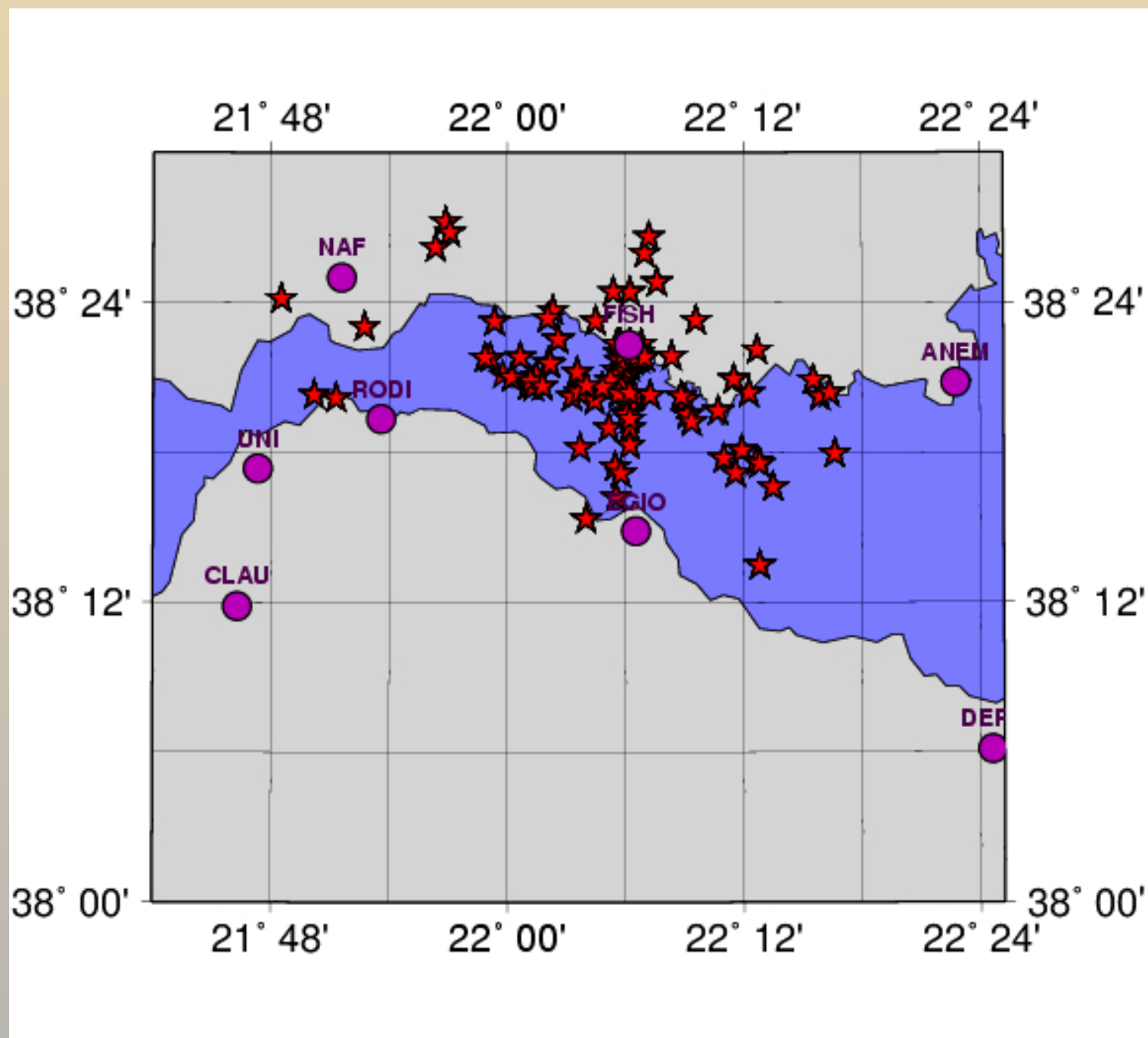
debski@igf.edu.pl

www.igf.edu.pl/~debski

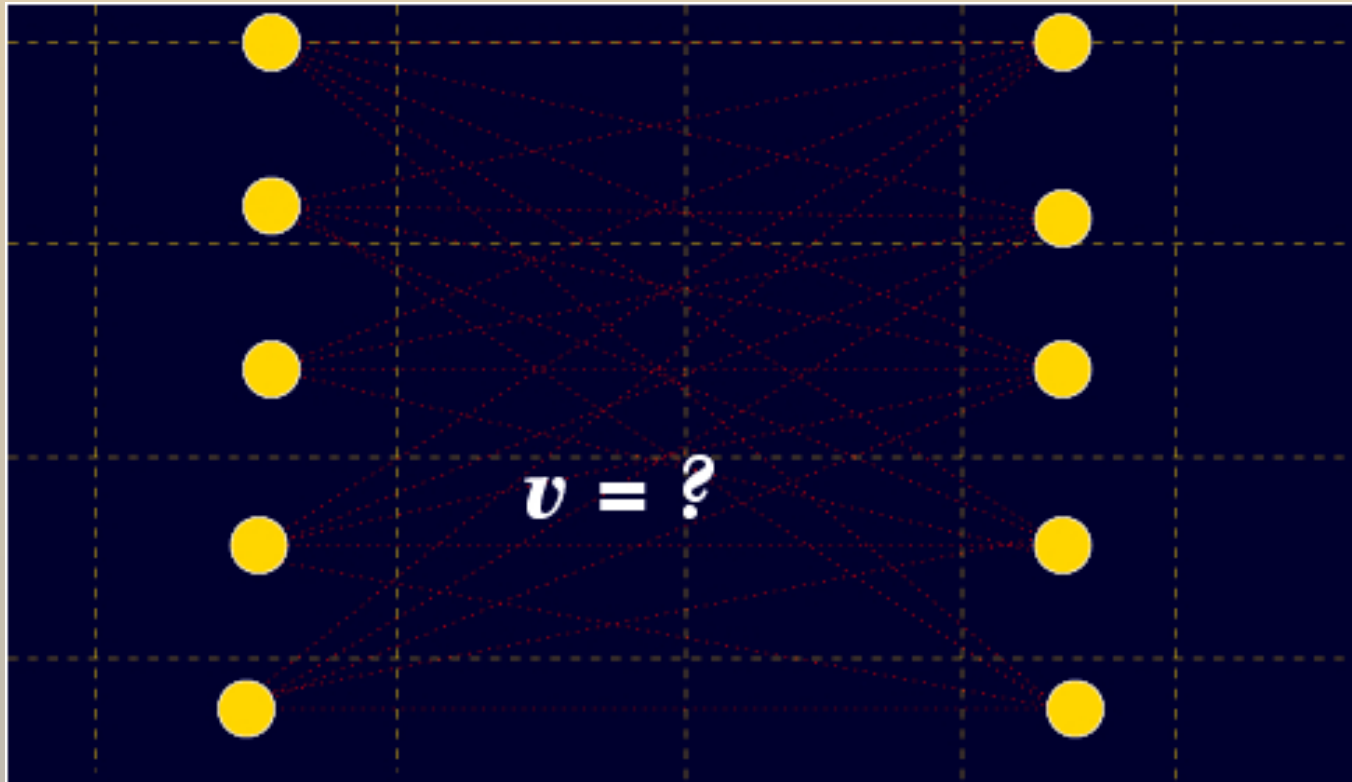
Plan wykładu

- Przykłady problemów odwrotnych
 - ★ Lokalizacja
 - ★ Tomografia prędkościowa
 - ★ Wybór parametryzacji
- Zagadnienie odwrotne jako problem wnioskowania statystycznego
- Prawdopodobieństwo - podstawowe fakty
 - ★ podstawowe definicje
 - ★ rozkłady prawdopodobieństwa - przykłady
 - ★ twierdzenie Bayesa
- Prawdopodobieństwo - dwie interpretacje
 - ★ interpretacja częstotliwościowa (ang. frequentists)
 - ★ interpretacja bayesowska

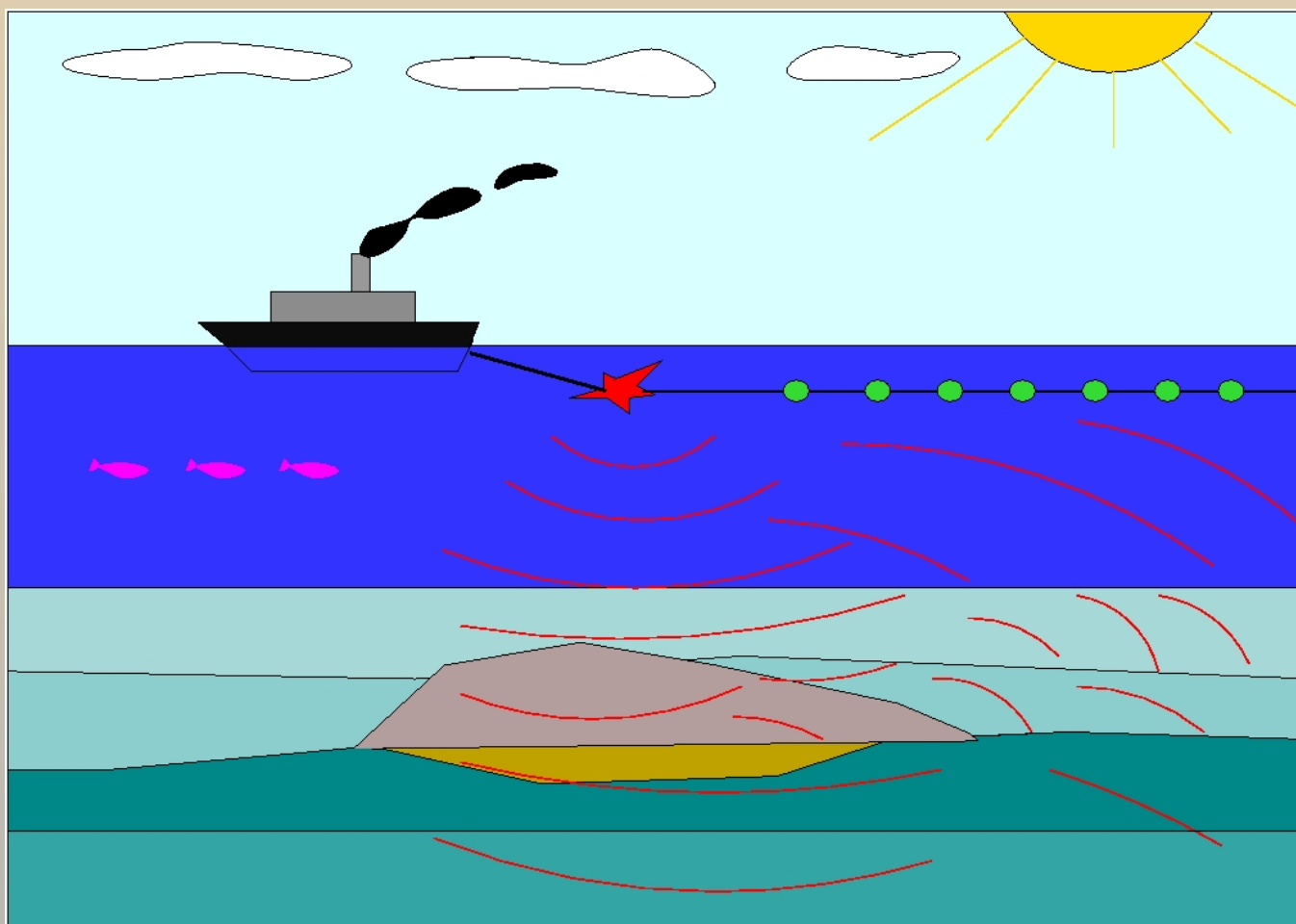
Lokalizacja wstrząsów



Tomografia sejsmiczna

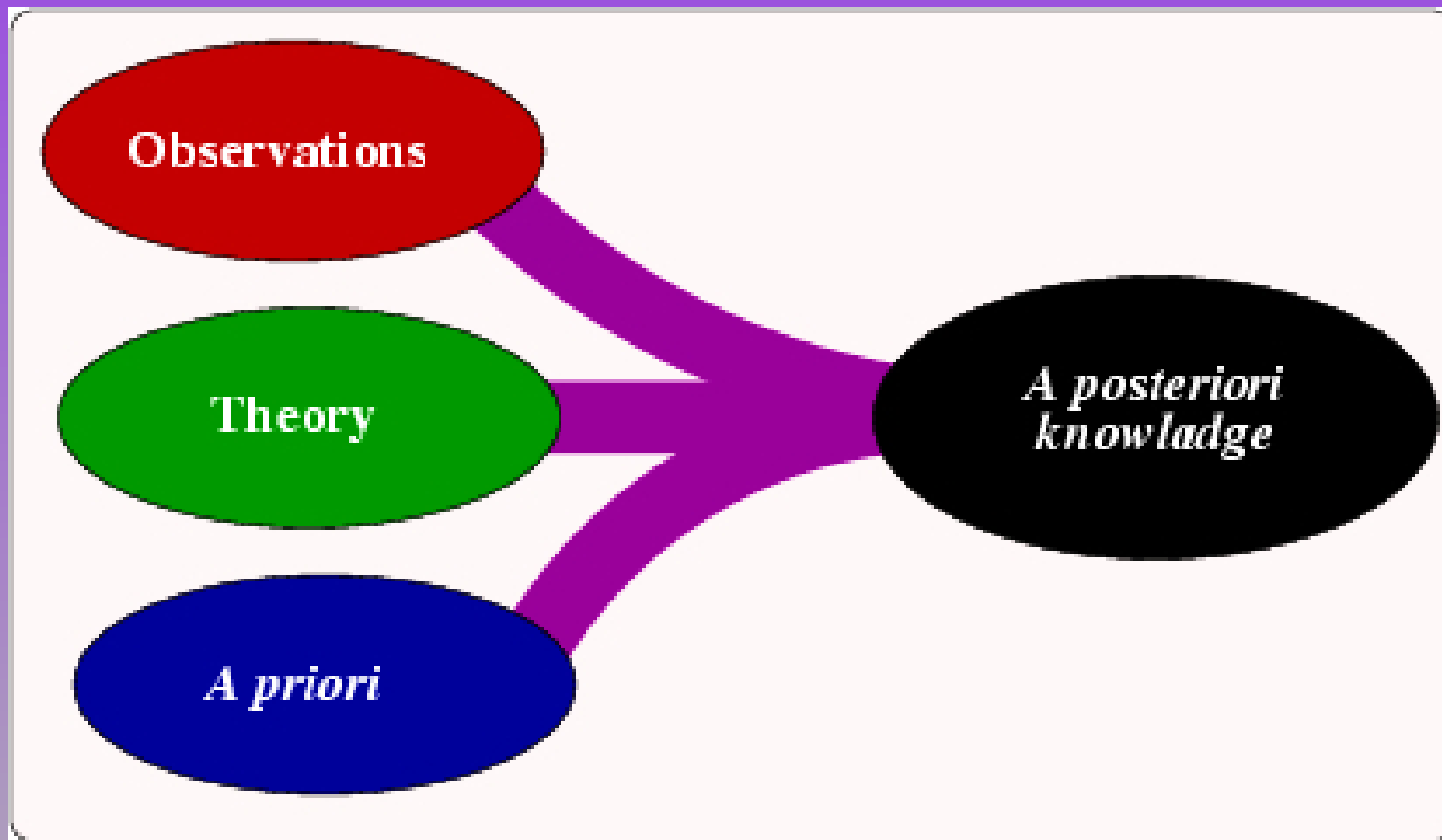


Wybór parametryzacji



Inwersja - łączenie informacji

(Wnioskowanie statystyczne)



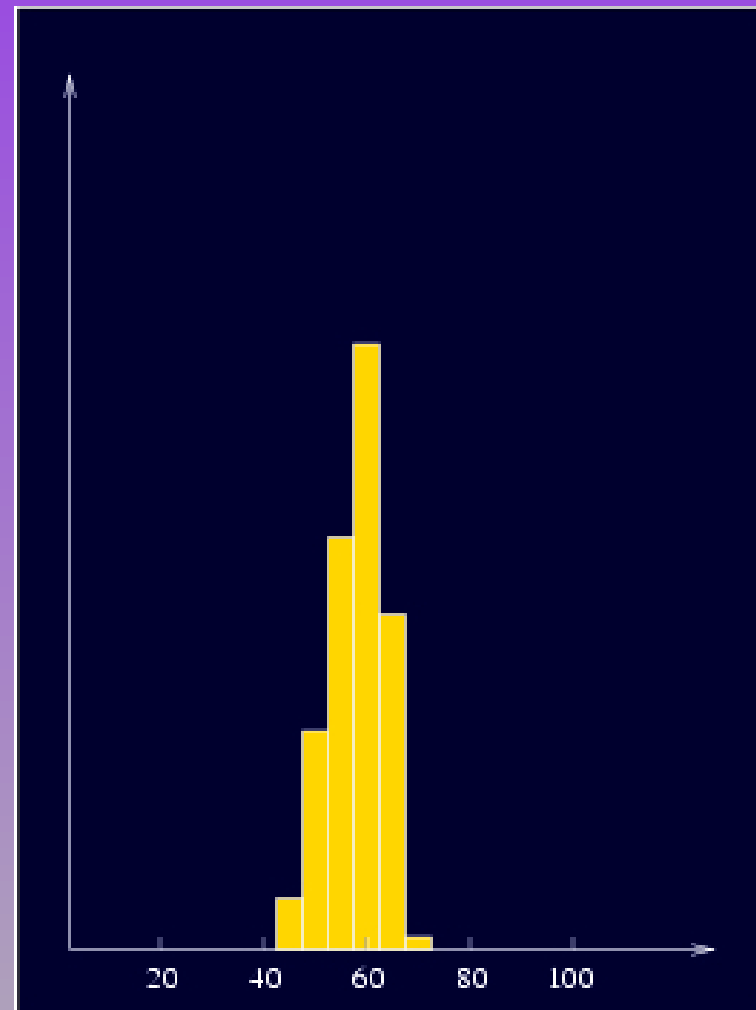
Probabilistyczny opis informacji

posiadana
informacja $\Leftrightarrow$ rozkład
prawdopod.

Postulat:

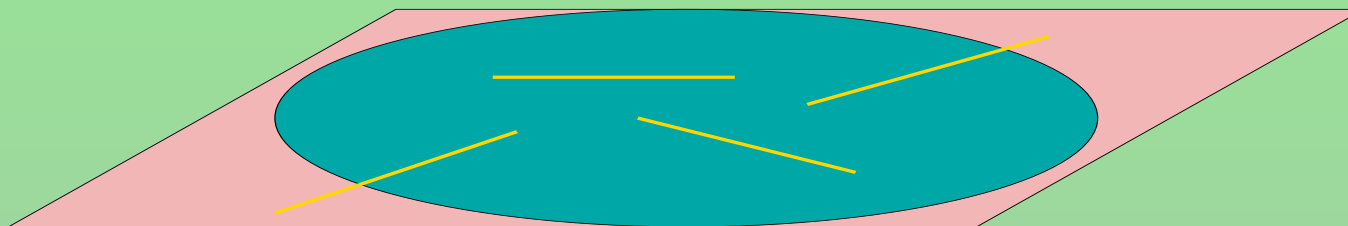
Każdą posiadaną informację możemy ilościowo opisać przy pomocy pewnego rozkładu prawdopodobieństwa:

Przykład wnioskowania rozwiązania problemu odwrotnego

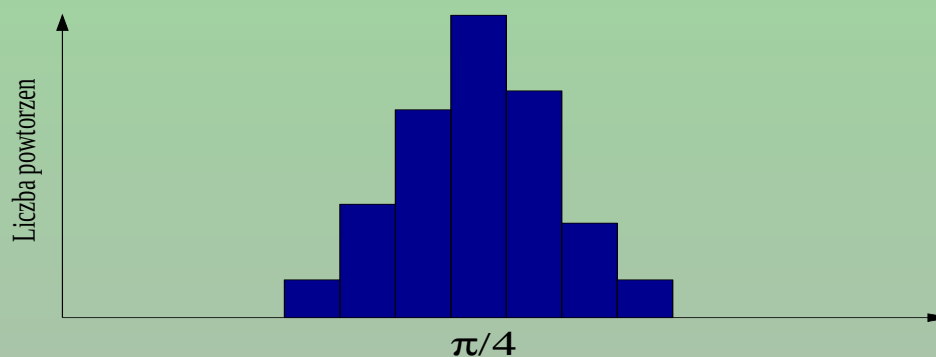


Prawdopodobieństwo - podstawy

powierzchnia koła

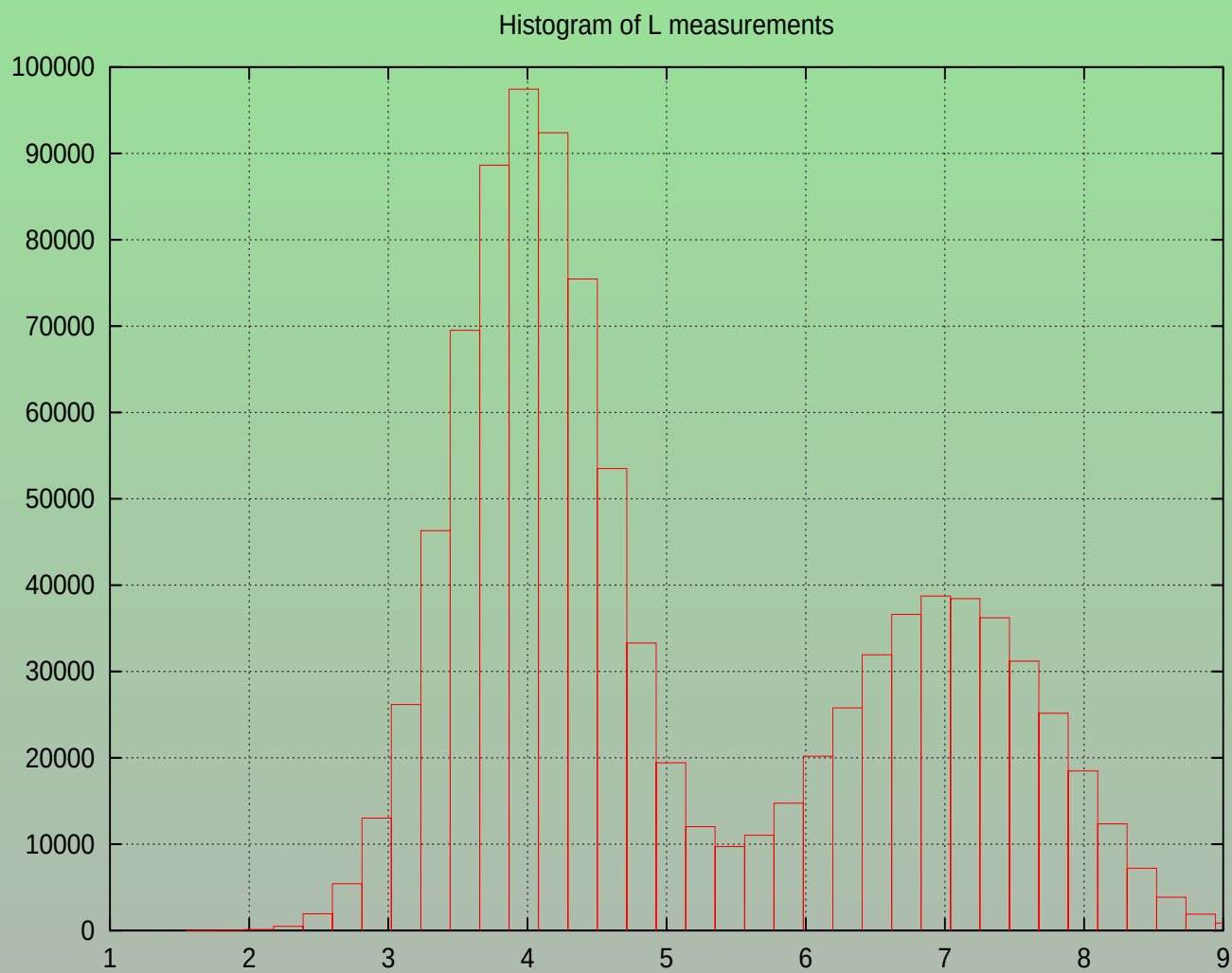


$$p = N_p/N$$



$$P(A) = \frac{N_i}{N_{\text{tot}}} \left[= \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4} \right]$$

Prawdopodobieństwo - procesy losowe



Podstawy aksjomatyczne (Kołomogorow)

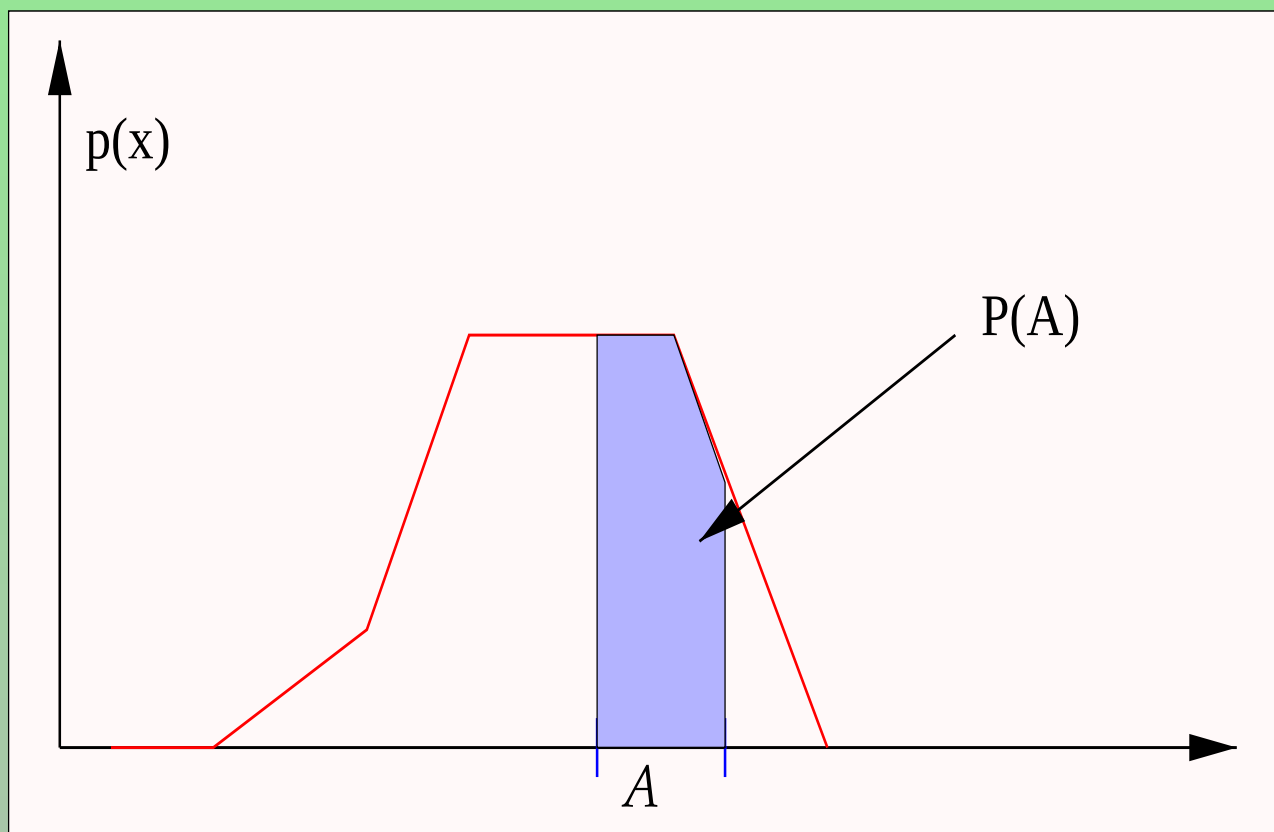
- funkcja: zdarzenie $\implies p \geq 0$
- prawdopodobieństwo zdarzenia pustego: $p = 0$
- prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia: $p = 1$
- jeżeli jest sumą niezależnych zdarzeń

$$P(A = \cup A_i) = \sum_i P(A_i)$$

Podstawy aksjomatyczne

Aksjomatyczna teoria miary - Przestrzeń
borelowska

Gęstość prawdopodobieństwa



$$P(A) = \int_A p(x) dx$$

Opis gęstości prawdopodobieństwa (pdf)

ang.: probability density function

- Normalizacja

$$\int_X p(x)dx = 1$$

- Wartość średnia

$$\bar{x} = \langle x \rangle = \int_X xp(x)dx$$

- Dyspersja

$$\sigma^2 = \langle (x - \bar{x})^2 \rangle = \int_X (x - \bar{x})^2 p(x)dx$$

- Momenty wyższego rzędu

Rozkłady wielowymiarowe

- Normalizacja

$$\int_X \int_Y p(x, y) dx dy = 1$$

- Wartość średnia/rozkłady brzegowe

$$\bar{x} = \int_{XY} x p(x, y) dx dy$$

$$p_x(x) = \int_Y p(x, y) dy$$

$$\bar{x} = \int_X x p_x(x) dx$$

Rozkłady wielowymiarowe

macierz kowariancji

$$\sigma_{xy} = \int_{XY} (x - \bar{x})(y - \bar{y})p(x, y)dx dy$$

$$\sigma_x^2 = \int_{XY} (x - \bar{x})(x - \bar{x})p(x, y)dx dy$$

$$\sigma_y^2 = \int_{XY} (y - \bar{y})(y - \bar{y})p(x, y)dx dy$$

$$cov = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

Rozkłady brzegowe i warunkowe

$$p(x, y)$$

- $p_x(x) = \int_Y p(x, y) dy$
- $p_y(y) = \int_X p(x, y) dx$
- $p_{x|y}(x|y) = p(x, y) / p_y(y)$
- $p_{y|x}(y|x) = p(x, y) / p_x(x)$

Rozkłady brzegowe i warunkowe

$$p(x, y) = p_{x|y}(x|y)p_y(y)$$

$$p(x, y) = p_{y|x}(y|x)p_x(x)$$

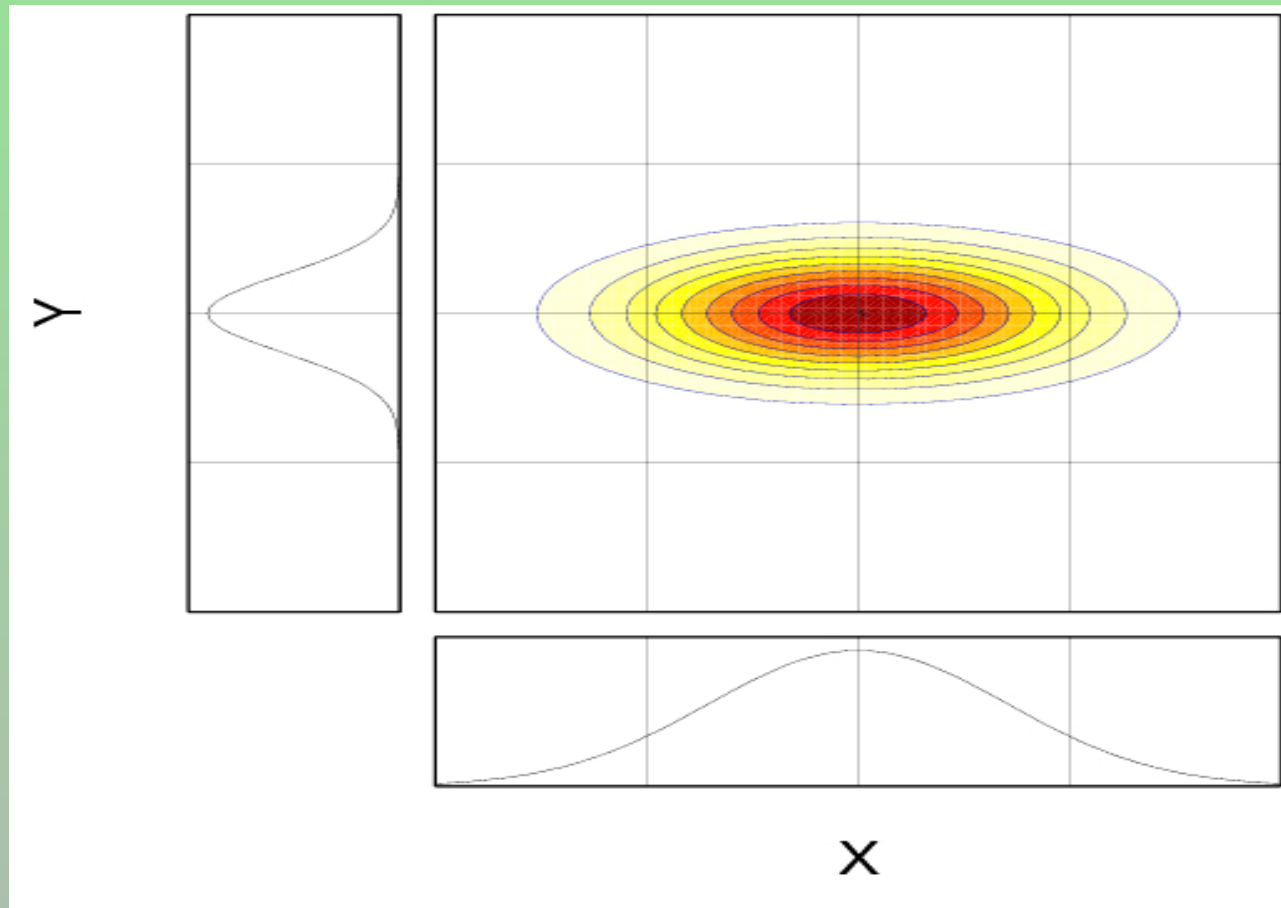
$$p_{x|y}(x|y)p_y(y) = p_{y|x}(y|x)p_x(x)$$

Twierdzenie Bayesa

$$p_{x|y}(x|y) = \frac{p_{y|x}(y|x)p_x(x)}{p_y(y)}$$

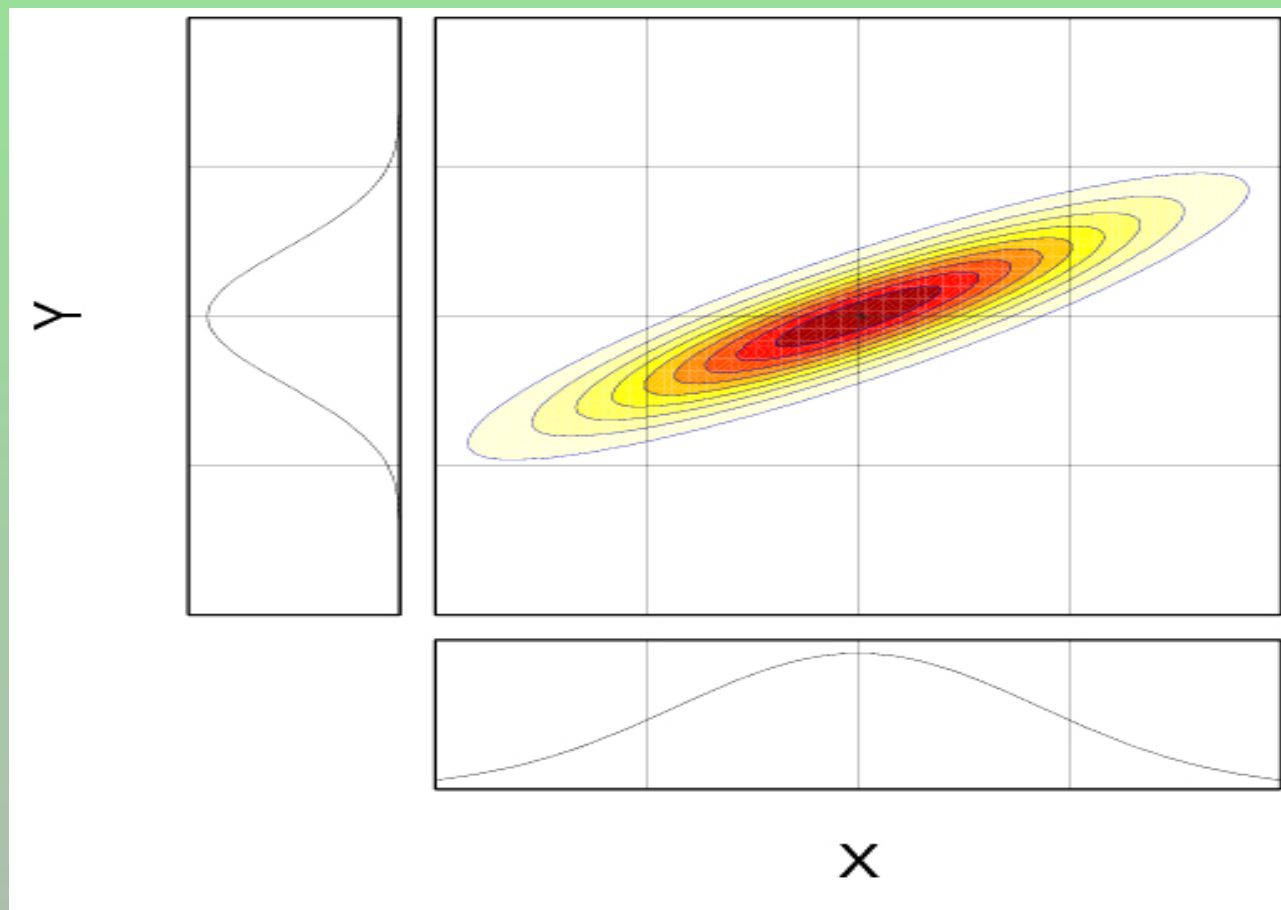
Przykład A

$$p(x, y) = p_x(x)p_y(y)$$



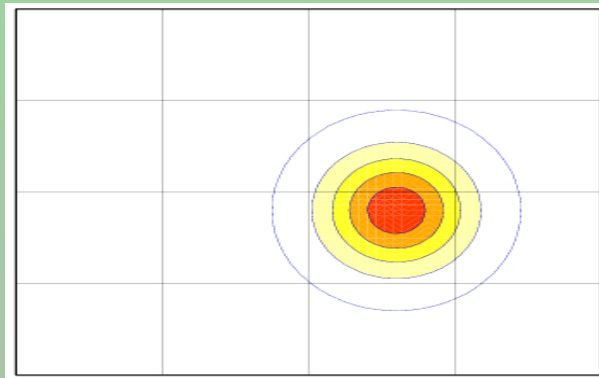
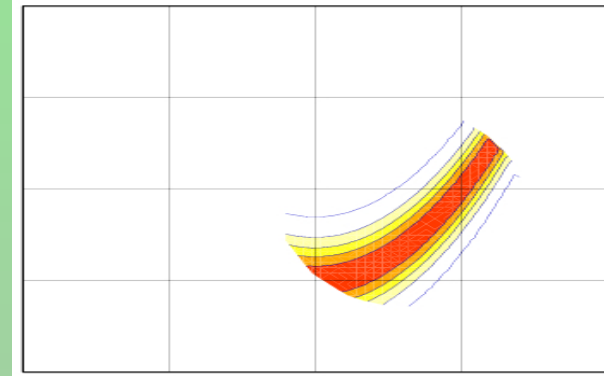
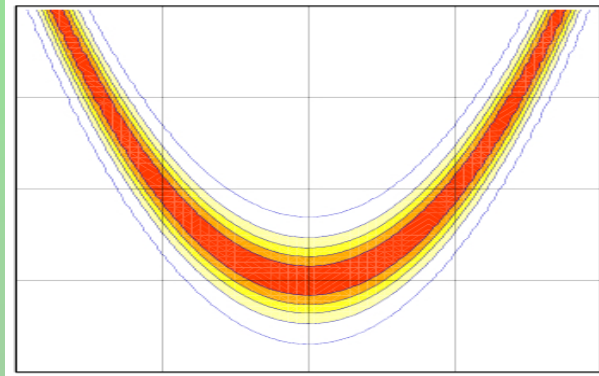
Przykład B

$$p(x, y) \neq p_x(x)p_y(y)$$



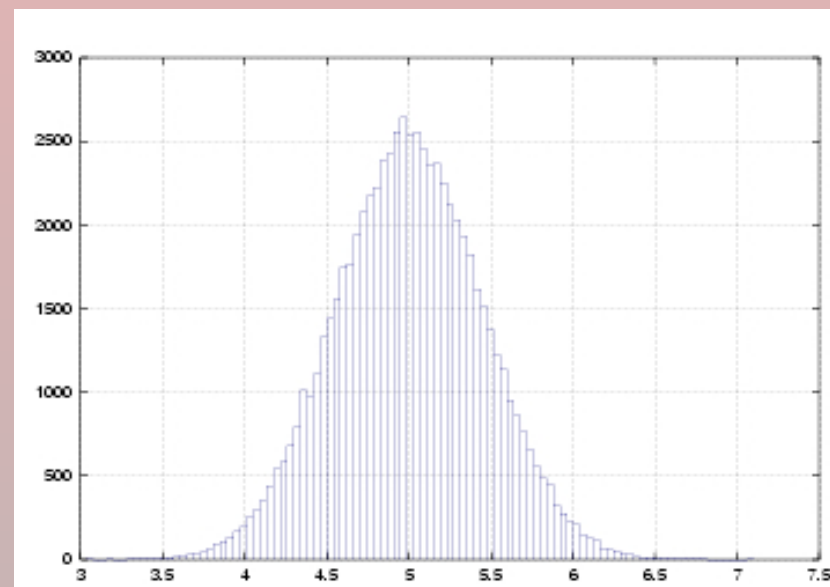
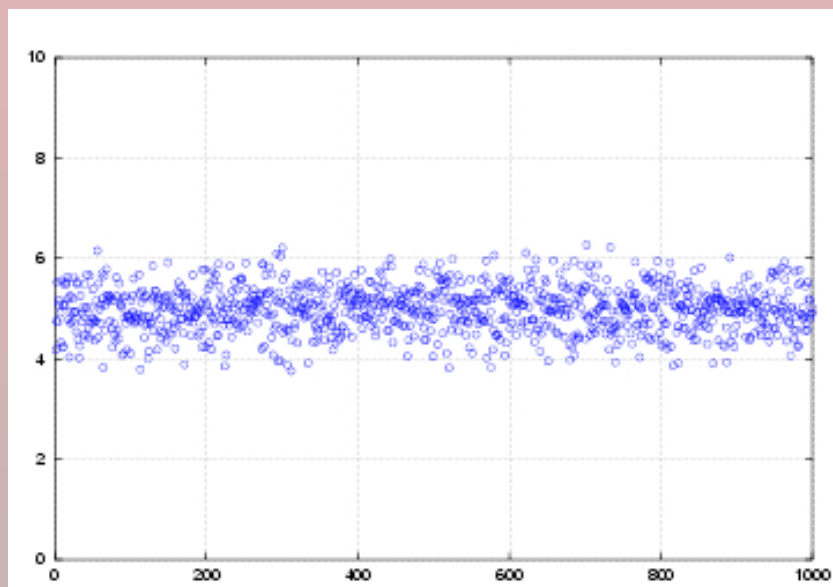
Przykład C

Warunkowe pdf



$$P_{a|b}(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P_b(B)}$$

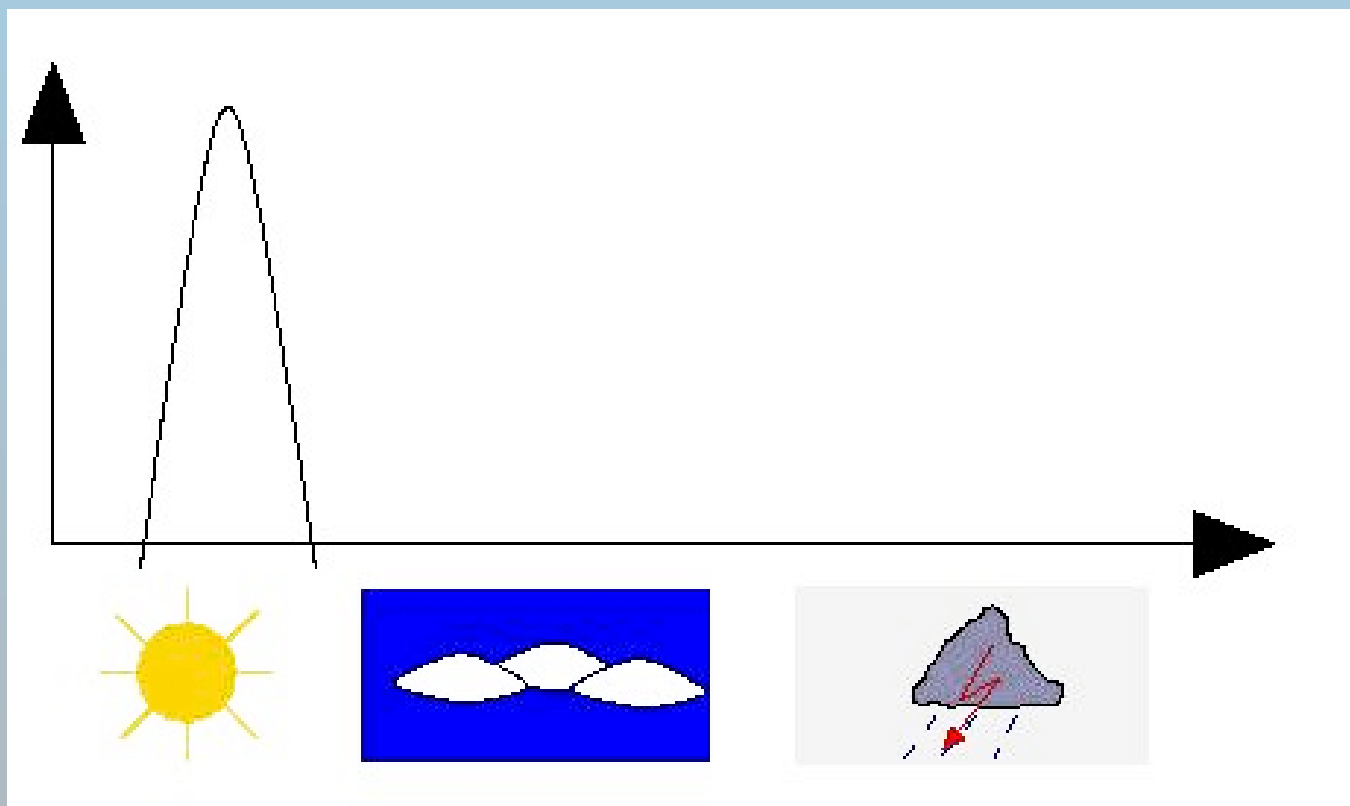
“Klasyczna” interpretacja



Interpretacja Bayesowska (a)



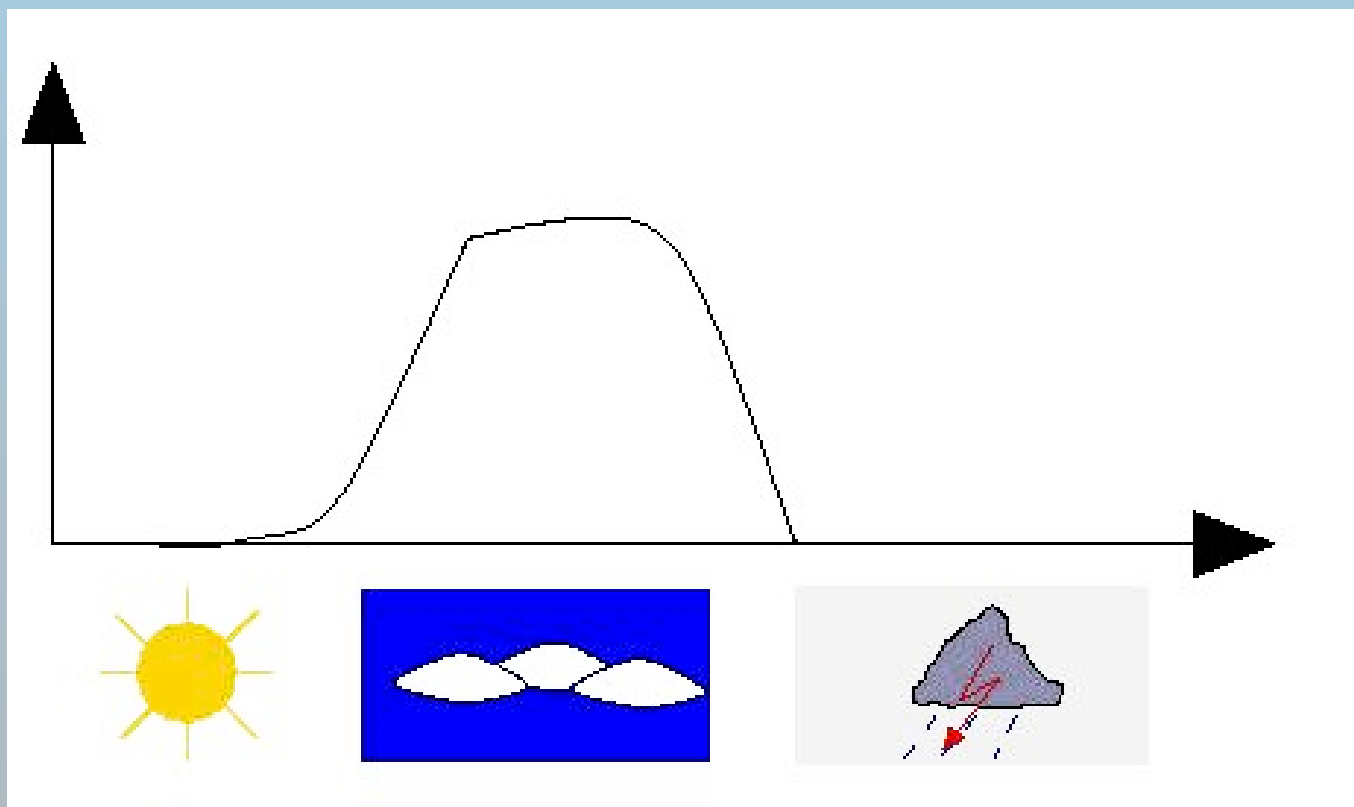
Interpretacja Bayesowska (a)



Interpretacja Bayesowska (b)



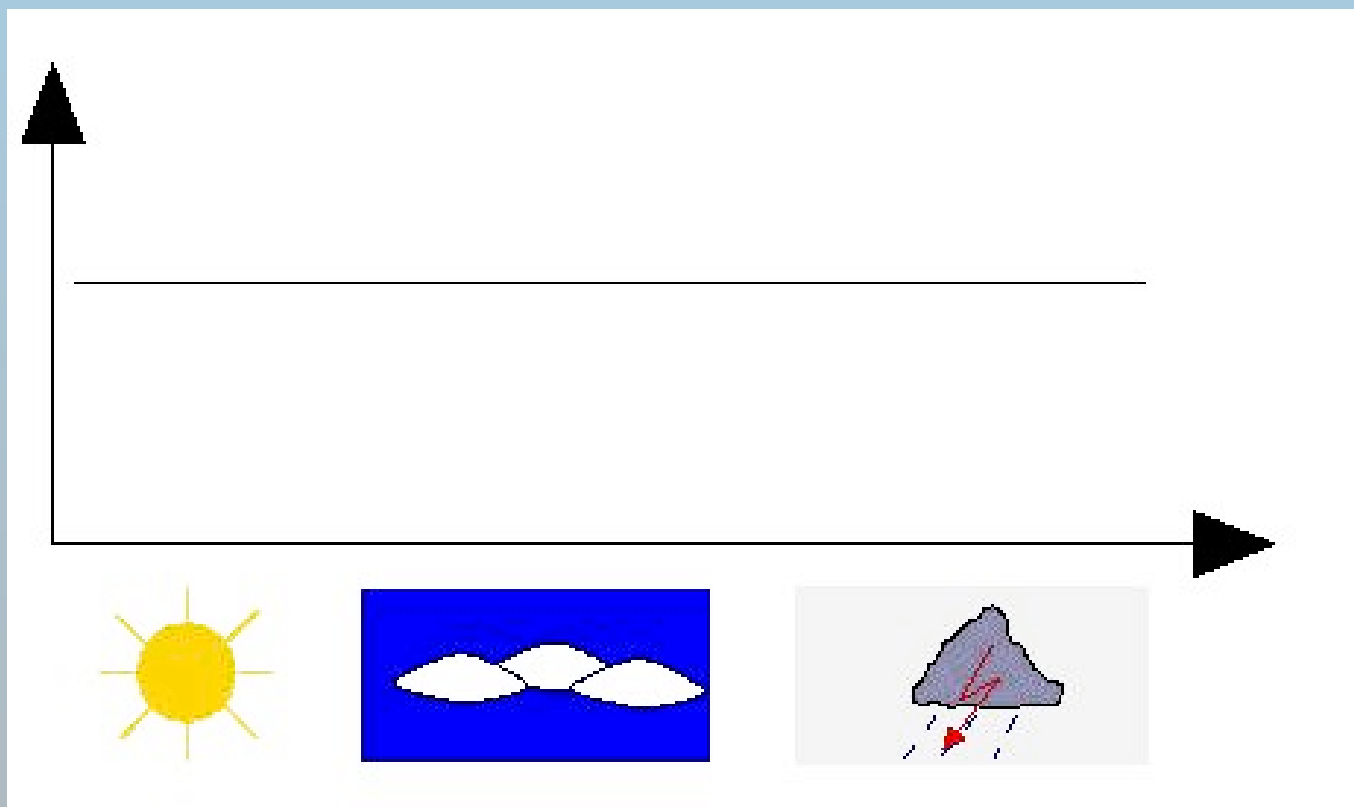
Interpretacja Bayesowska (b)



Interpretacja Bayesowska (b)



Interpretacja Bayesowska (b)



Baybowska formuła rozkładu *a posteriori*

$$x \Rightarrow \mathbf{m}$$

$$y \Rightarrow \mathbf{d}$$

$$\sigma_M(\mathbf{m}|\mathbf{d}) = \frac{f_M(\mathbf{m})L(\mathbf{d}|\mathbf{m})}{f_D(\mathbf{d})}$$