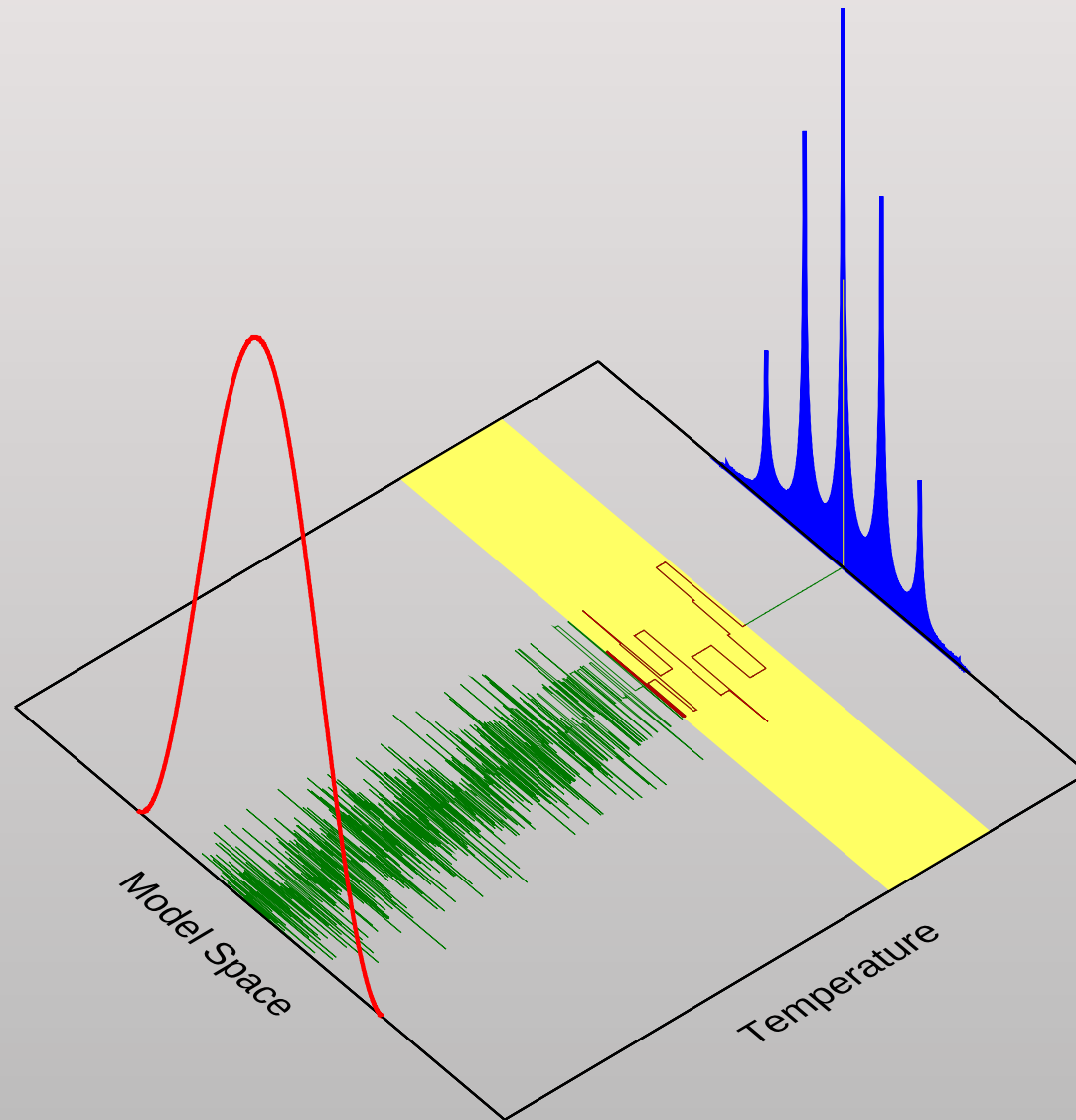


Metody inwersji Bayesowskiej

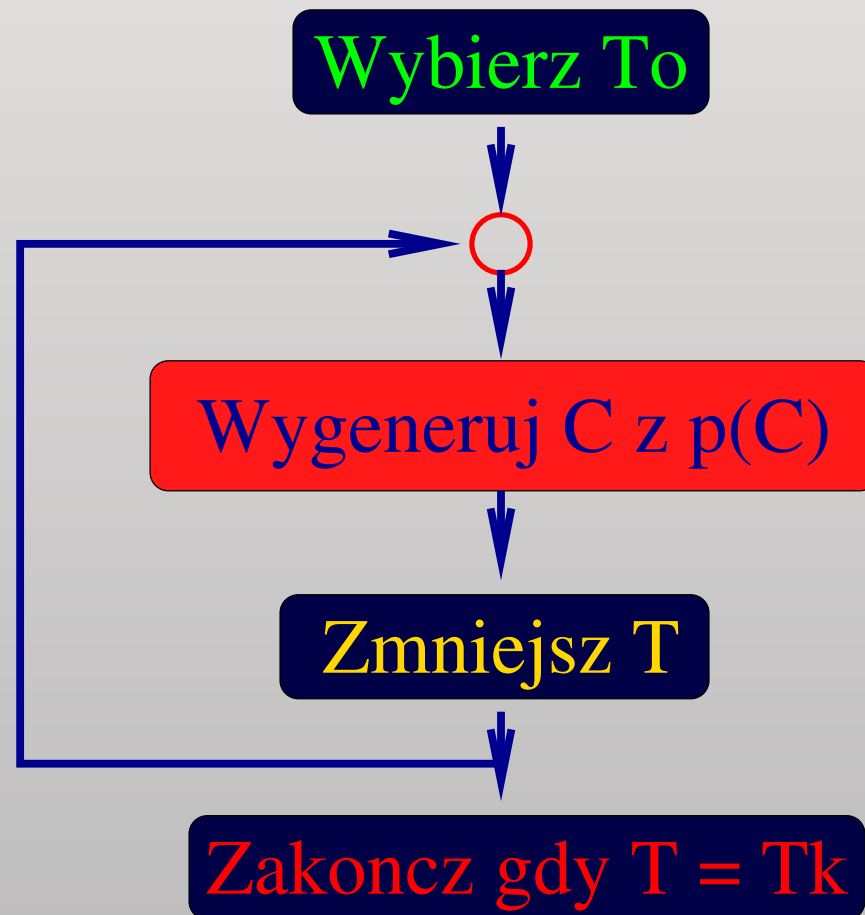
-L8-

IGF PAN, 5.V.2005

Simulated Annealing



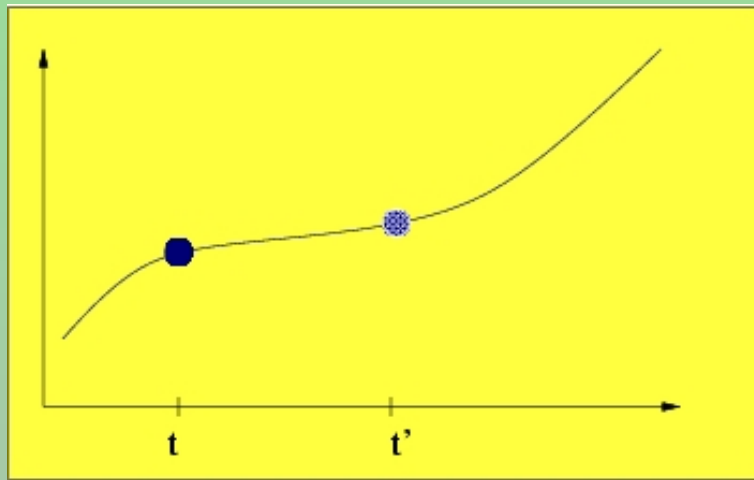
Algorytmy typu **Simulated Annealing**



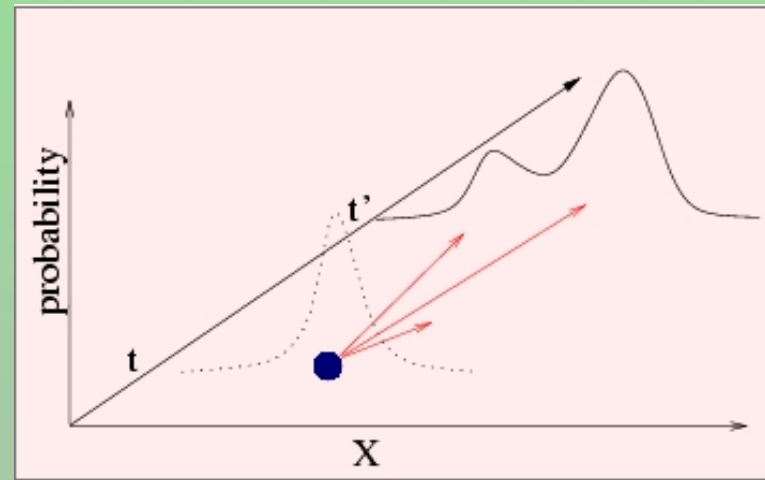
Procesy dynamiczne

(z krótką pamięcią)

deterministyczne



stochastyczne



$$X(t + dt) = X(t) + f(X(t), t)dt \quad P(x', t') = \sum_x P(x, t) K(t', x'; t, x)$$

Łańcuchy Markowa

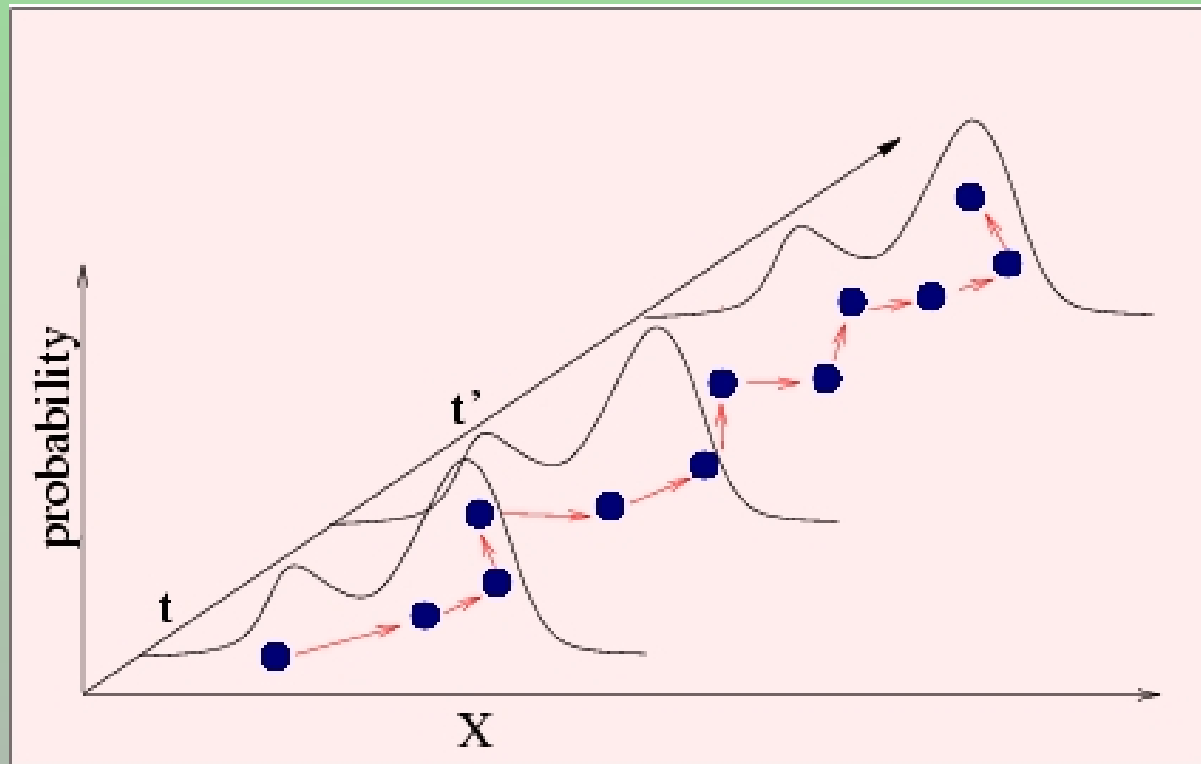
- ❖ dyskretny czas: $t_1, t_2, \dots$
- ❖ proces stochastyczny z “krótką” pamięcią $K(t_i, x; t_{i-1}, x_{i-1})$
- ❖ proces ergodyczny:
 - ★ stacjonarny $K(t, x; t', x') = K(x, x')$
 - ★ nieredukowalny: (graf nieredukowalny)
 - ★ aperiodyczny
- ❖ Istnieje rozkład stacjonarny: $\pi(x') = \pi(x)$

$$\pi(x) = \int_{x'} \pi(x') K(x; x') dx'$$

Stacjonarny łańcuch Markowa

$$p(x_i) = \sum_k p(x_k) K(x_i; x_k)$$

$$p(x) = \int \pi(x') K(x; x') dx'$$

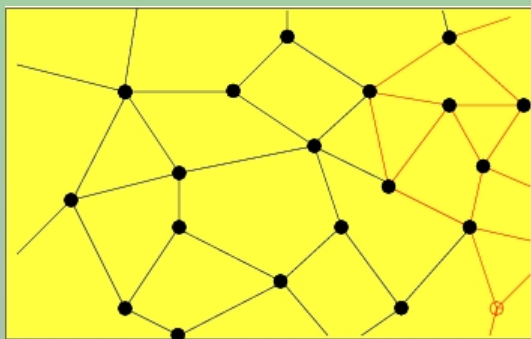


Realizacja łańcucha Markowa

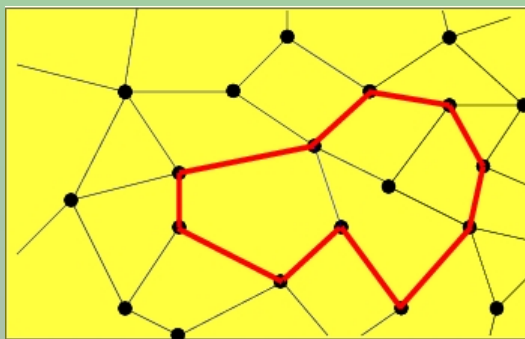
Błądzenie przypadkowe (ang. random walk)

$$x_i \Longrightarrow x_{i+1} = x : p_{x_i \rightarrow x_{i+1}} = K(x_{i+1} | x_i)$$

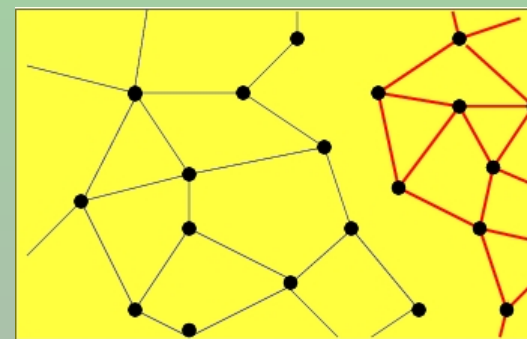
ergodyczny



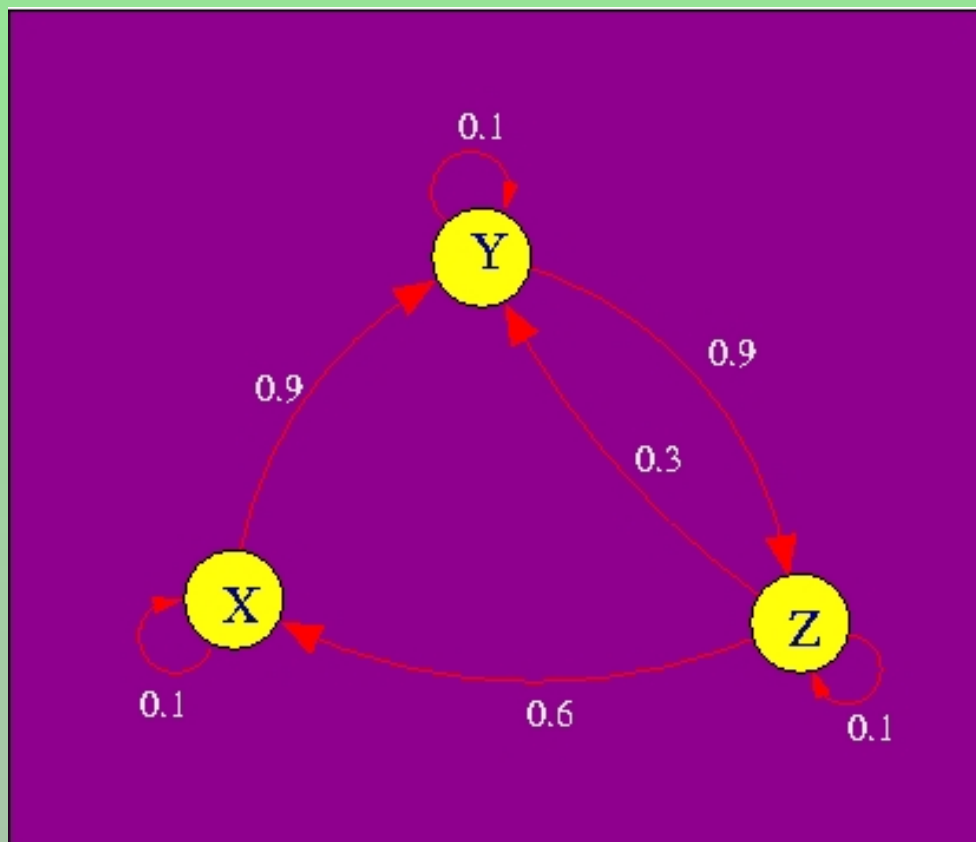
periodyczny



redukowalny



Algorytm przykład



Algorytm przykład

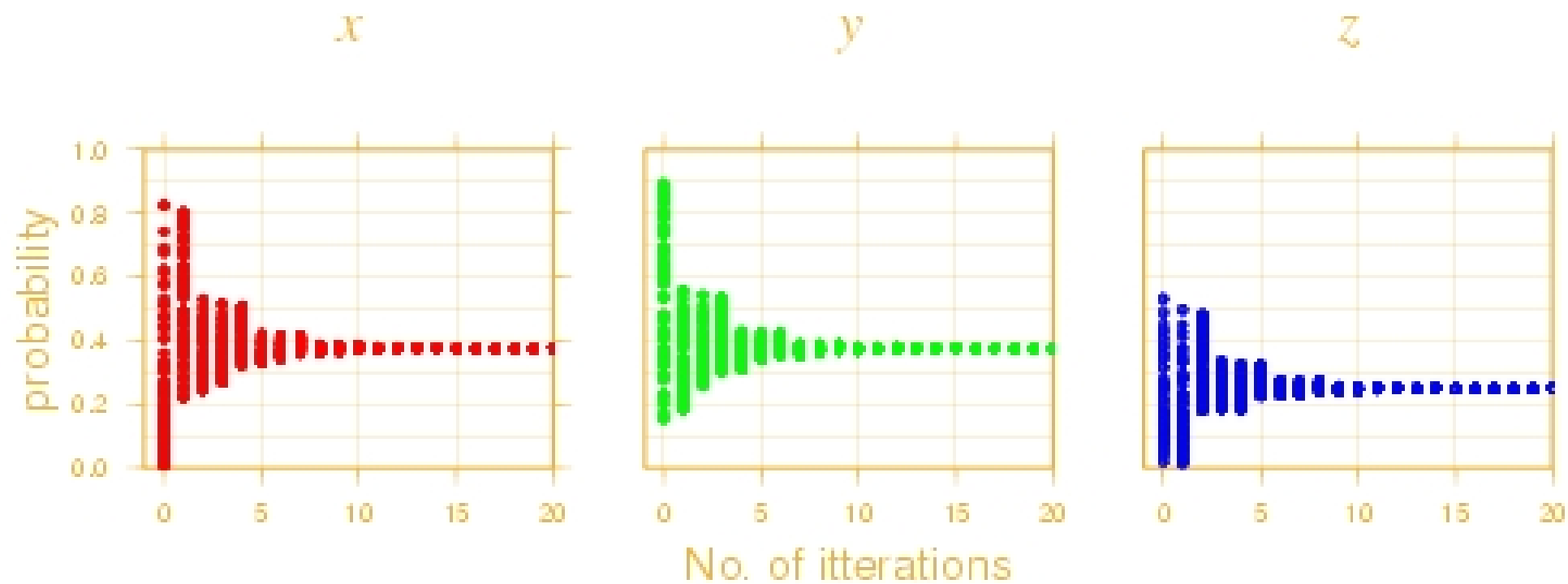
$$\mathbf{p}_i = (p_x, p_y, p_z)$$

Równanie ewolucji

$$\mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{p}_i \cdot \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \\ 0.6 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$

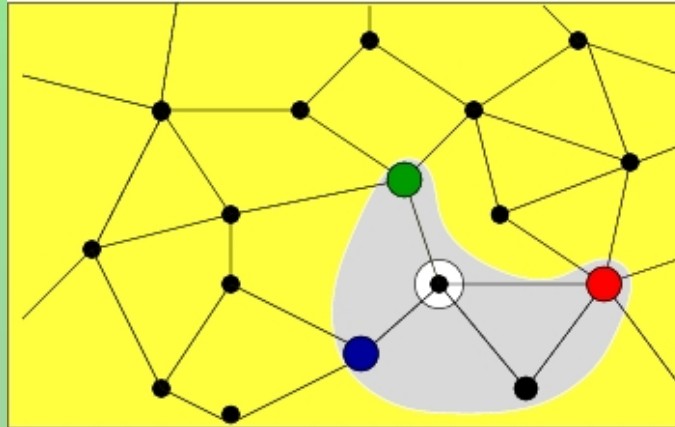
$$\mathbf{p}_{i \rightarrow \infty} = ???$$

Algorytm przykład



Określenie procesu

1.



2.

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{M1} & \cdots & K_{MN} \end{pmatrix}$$

Algorytm Metropolisa-Hastinga

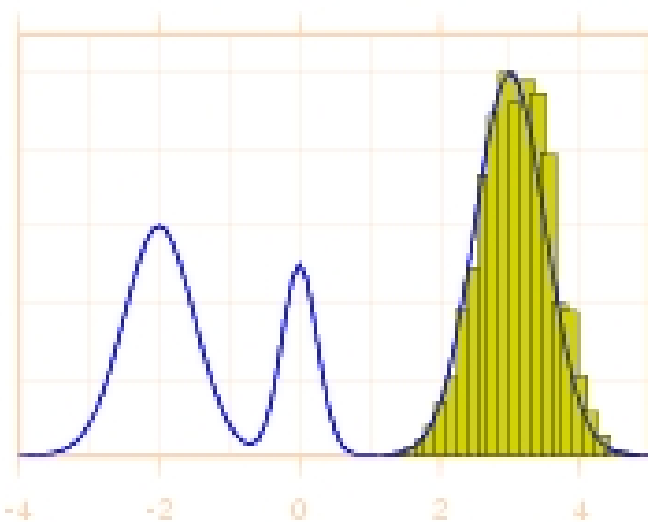
$$x_{i+1} = x_i + \delta x_i$$

$$K(x_i; x_{i+1}) = \min \left\{ 1, \frac{p(x_{i+1})}{p(x_i)} \right\}$$

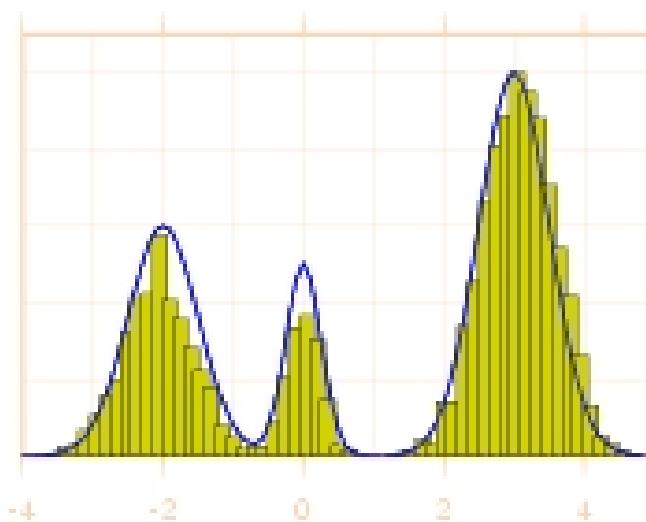
Algorytm MH - ograniczenia

$$x_{i+1} = x_i + \delta x$$

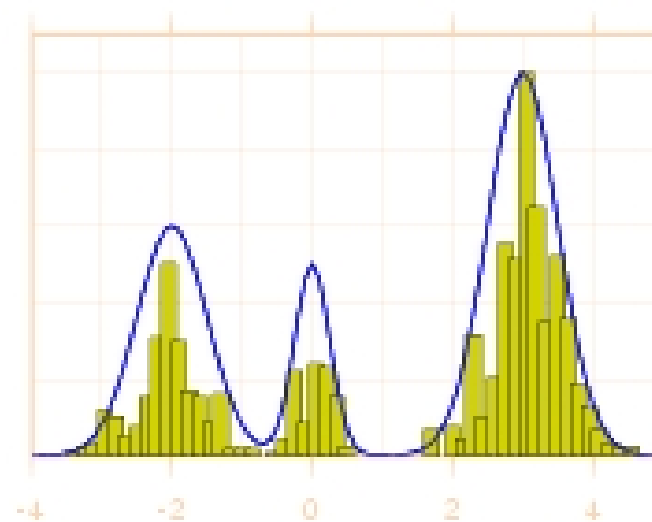
too small



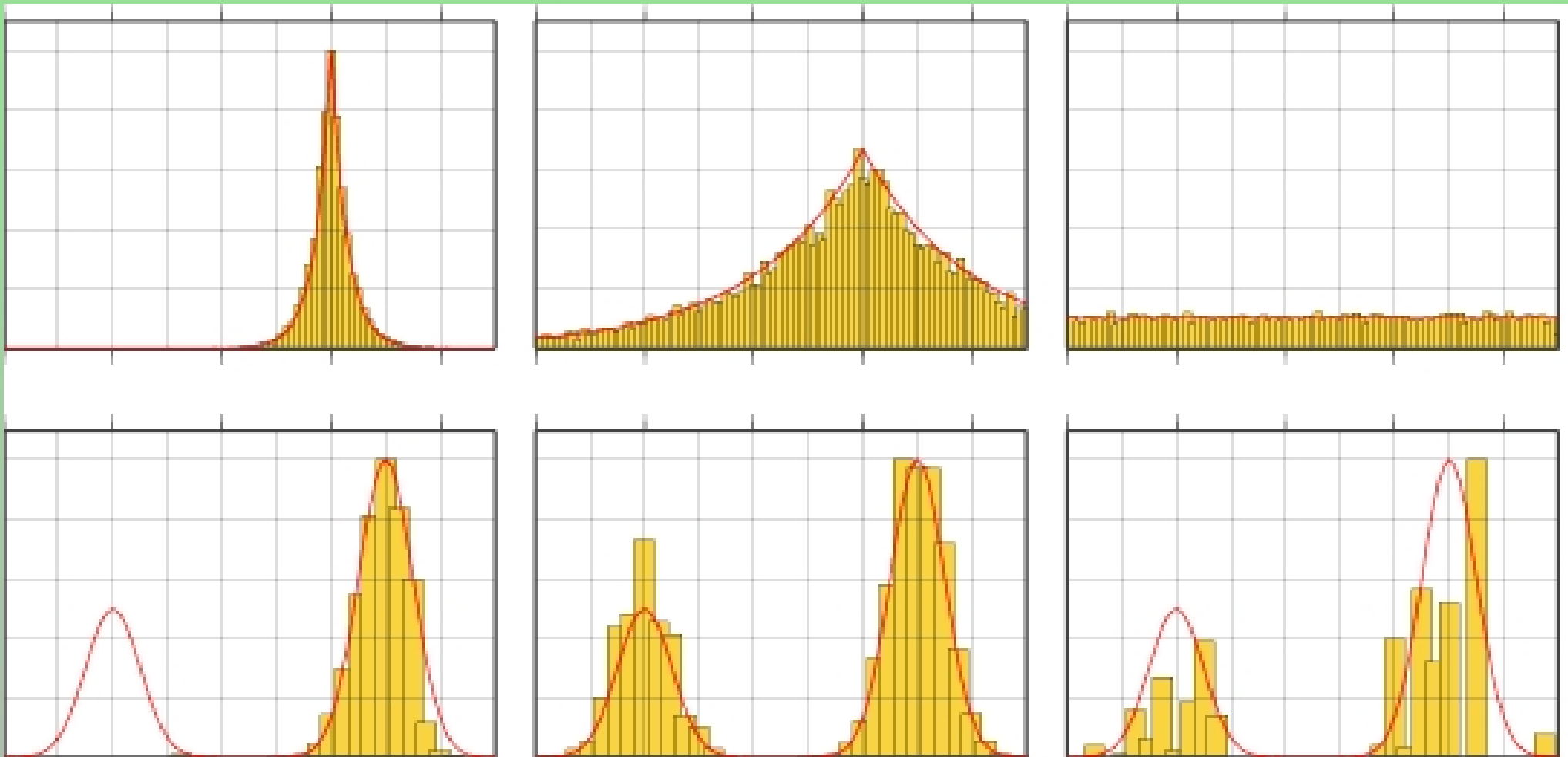
optimum



too large



Algorytm MH - ograniczenia



- ❖ Utwórz rozkład “Boltzmanowski” $p(\mathbf{m}, T) = \exp(-S(\mathbf{m})/T)$
- ❖ Wybierz T_0 , i model początkowy $\mathbf{m}^\alpha$ i oceń go

$$p_\alpha = p(\mathbf{m}^\alpha, T_0)$$

- ❖ Dla danej temperatury T_k wylosuj $\mathbf{m}^{\alpha+1}$ z $p(\mathbf{m}, T_k)$

★ wylosuj próbkę testową $\mathbf{m}^\beta$: $\mathbf{m}^\beta = \mathbf{m}^\alpha + \delta \mathbf{m}$

★ oceń $\mathbf{m}^\beta$: $p_\beta = p(\mathbf{m}^\beta, T_k)$

★ Utwóź $\mathbf{m}^{\alpha+1}$

zaakceptuj $\mathbf{m}^\beta$ z prawdopodobieństwem $p = \min(1, p_\beta/p_\alpha)$

$$\mathbf{m}^{\alpha+1} = \mathbf{m}^\beta$$

jeśli $\mathbf{m}^\beta$ odrzucona duplikuj stan obecny

$$\mathbf{m}^{\alpha+1} = \mathbf{m}^\alpha$$

- ❖ Zmniejsz temperaturę

$$T_{k+1} = f(T_k)$$

- ❖ Powtarzaj aż do osiągnięcia końcowej temperatury

Algorytm Metropolisa jako *Random Walk*

