

Metody inwersji Bayesowskiej

-L3-

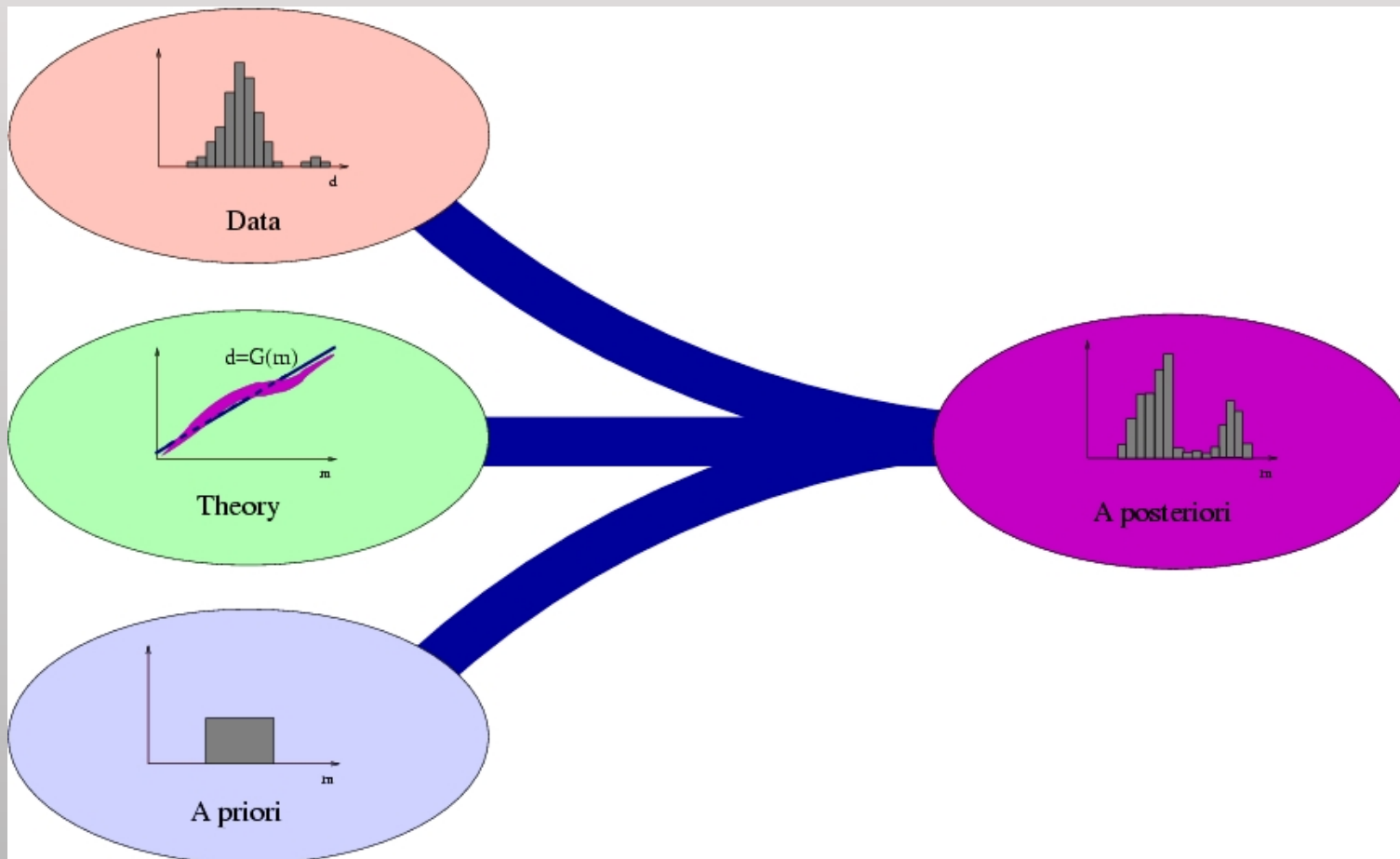
IGF PAN, 24.III.2005

Probabilistyczny opis informacji

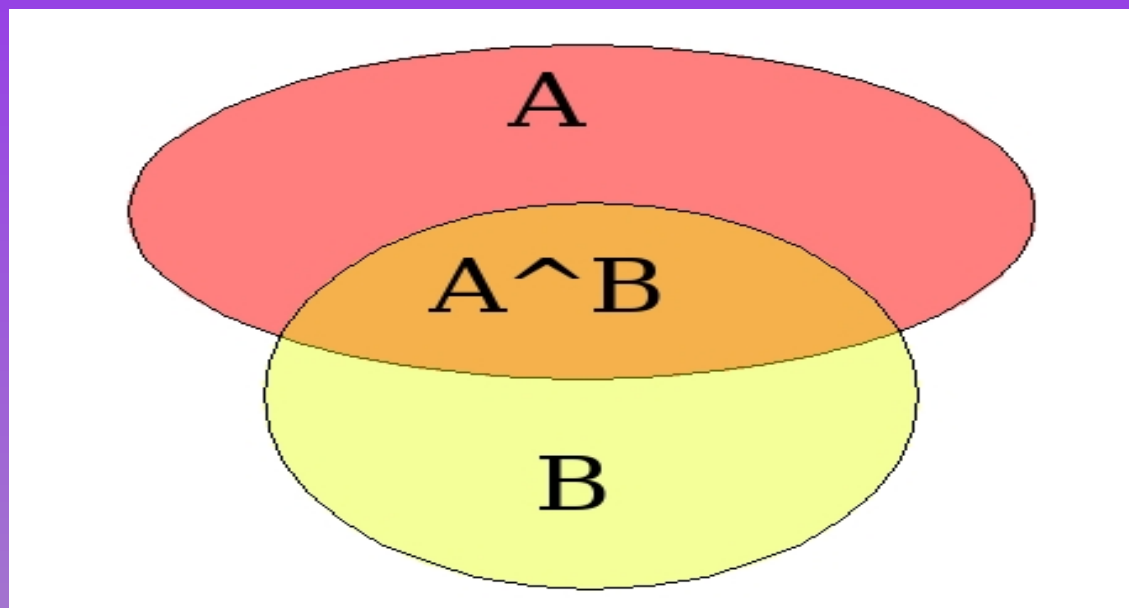
posiadana
informacja $\Leftrightarrow$ rozkład
prawdopod.

Inwersja - łączenie informacji

(Wnioskowanie statystyczne)



Rozkłady brzegowe i warunkowe



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Rozkłady brzegowe i warunkowe

$$p(\mathbf{m}, \mathbf{d})$$

$$\diamond p_{\mathbf{m}}(\mathbf{m}) = \int_D p(\mathbf{m}, \mathbf{d}) d\mathbf{d}$$

$$\diamond p_{\mathbf{d}}(\mathbf{d}) = \int_M p(\mathbf{m}, \mathbf{d}) d\mathbf{m}$$

$$\diamond p_{\mathbf{m}|\mathbf{d}}(\mathbf{m}|\mathbf{d}) = p(\mathbf{m}, \mathbf{d})/p_{\mathbf{d}}(\mathbf{d})$$

$$\diamond p_{\mathbf{d}|\mathbf{m}}(\mathbf{d}|\mathbf{m}) = p(\mathbf{m}, \mathbf{d})/p_{\mathbf{m}}(\mathbf{m})$$

Rozkłady brzegowe i warunkowe

$$p(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = p_{\mathbf{m}|\mathbf{d}}(\mathbf{m}|\mathbf{d})p_{\mathbf{d}}(\mathbf{d})$$

$$p(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = p_{\mathbf{d}|\mathbf{m}}(\mathbf{d}|\mathbf{m})p_{\mathbf{m}}(\mathbf{m})$$

$$p_{\mathbf{m}|\mathbf{d}}(\mathbf{m}|\mathbf{d})p_{\mathbf{d}}(\mathbf{d}) = p_{\mathbf{d}|\mathbf{m}}(\mathbf{d}|\mathbf{m})p_{\mathbf{m}}(\mathbf{m})$$

Twierdzenie Bayesa

$$p_{\mathbf{m}|\mathbf{d}}(\mathbf{m}|\mathbf{d}) = \frac{p_{\mathbf{d}|\mathbf{m}}(\mathbf{d}|\mathbf{m})p_{\mathbf{m}}(\mathbf{m})}{p_{\mathbf{d}}(\mathbf{d})}$$

Twierdzenie Bayesa -interpretacja

$$\mathbf{d} \implies \mathbf{d}^{obs}$$

$$p_{\mathbf{m}|\mathbf{d}}(\mathbf{m}|\mathbf{d}^{obs}) = \frac{p_{\mathbf{d}|\mathbf{m}}(\mathbf{d}^{obs}|\mathbf{m})p_{\mathbf{m}}(\mathbf{m})}{p_{\mathbf{d}}(\mathbf{d}^{obs})}$$

Rozkład *a posteriori*

$$p_{post}(\mathbf{m}|\mathbf{d}^{obs}) \sim p(\mathbf{d}^{obs}|\mathbf{m}) p_{apr}(\mathbf{m})$$

Podejście Tarantoli

Dwa rozkłady opisujące dwie różne informacje

1. $p(x)$

2. $q(x)$

$$\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p}(\mathbf{x}) \mathbf{q}(\mathbf{x})}{\mu(\mathbf{x})}$$

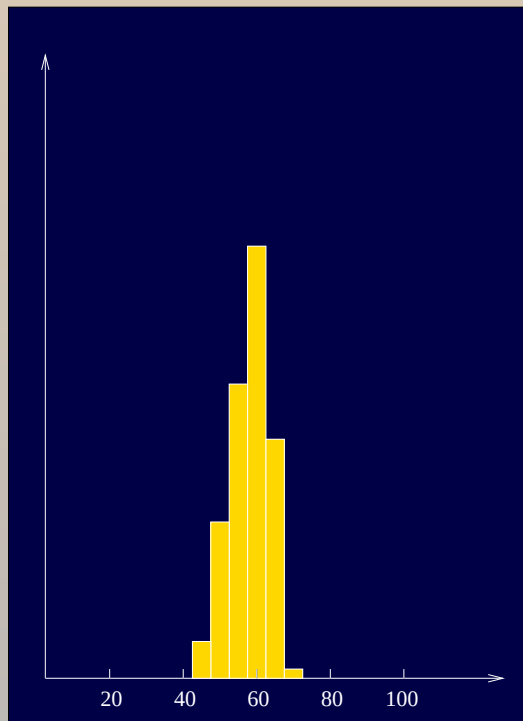
Opisuje **łączne** posiadane informacje

Przykład łączenia informacji (wnioskowania)

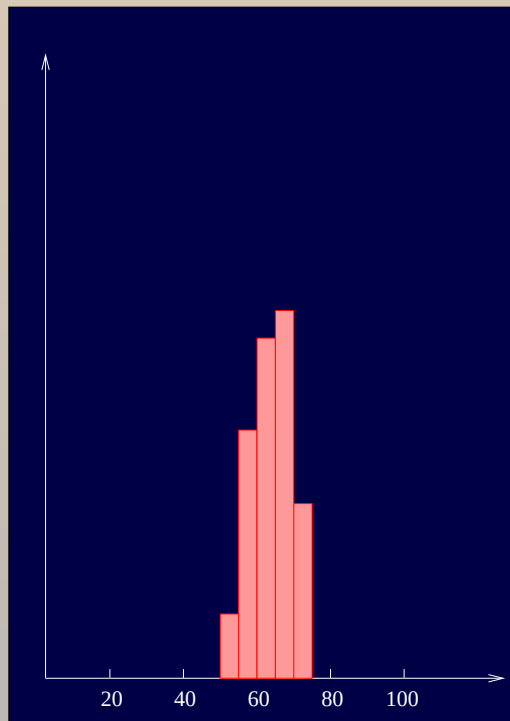


Przykład cd.

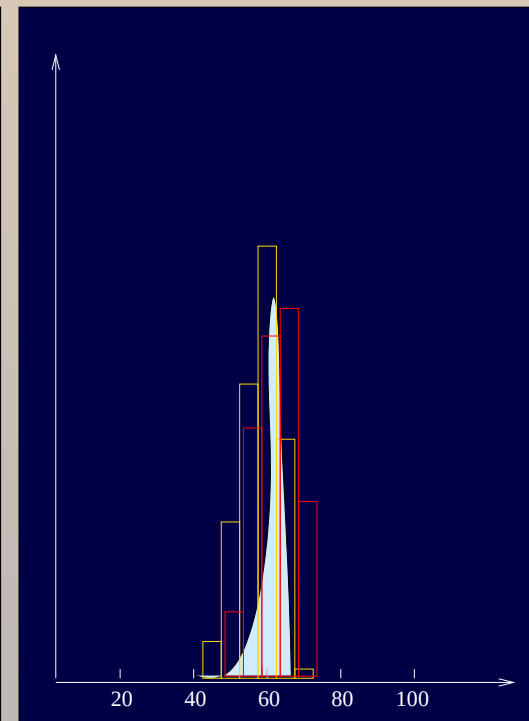
$$\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p}(\mathbf{x}) \mathbf{q}(\mathbf{x})}{\mu(\mathbf{x})}$$



$p(x)$



$q(x)$



$p \wedge q(x)$

Rozwiązanie problemu inwersyjnego

1. obserwacje: $p(\mathbf{d})$
 2. teoria : $q(\mathbf{m}, \mathbf{d})$
 3. *a priori* : $f(\mathbf{m}, \mathbf{d})$
-

$$(p \wedge q)(\cdot) = \frac{p(\cdot) q(\cdot)}{\mu(\cdot)}$$

Rozkład *A posteriori pdf* na $M \times D$

Trzy kroki:

1. Uogólnienie wszystkich rozkładów na przestrzeń $M \times D$
2. Utworzenie uogólnionej funkcji podobieństwa:

$$\mathcal{L}(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = (p \wedge q)(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = \frac{p(\mathbf{m}, \mathbf{d}) q(\mathbf{m}, \mathbf{d})}{\mu(\mathbf{m}, \mathbf{d})}$$

3. utworzenie rozkładu *A posteriori*:

$$\sigma(m, d) \approx (\mathcal{L} \wedge f)(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = \frac{\mathcal{L}(\mathbf{m}, \mathbf{d}) f(\mathbf{m}, \mathbf{d})}{\mu(\mathbf{m}, \mathbf{d})}$$

A posteriori pdf

$$\sigma(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = \frac{p(\mathbf{m}, \mathbf{d}) q(\mathbf{m}, \mathbf{d}) f(\mathbf{m}, \mathbf{d})}{\mu^2(\mathbf{m}, \mathbf{d})}$$

Brzegowe rozkłady *A posteriori*

$$\sigma_m(m) = \int_D \sigma(m, d) dD$$

$$\sigma_d(d) = \int_M \sigma(m, d) dM$$

