



# Metody inwersji Bayesowskiej

## -L2-



## Zagadnienie odwrotne (najczęściej)

zagadnienie odwrotne



pomiar pośredni

(estymacja parametrów)

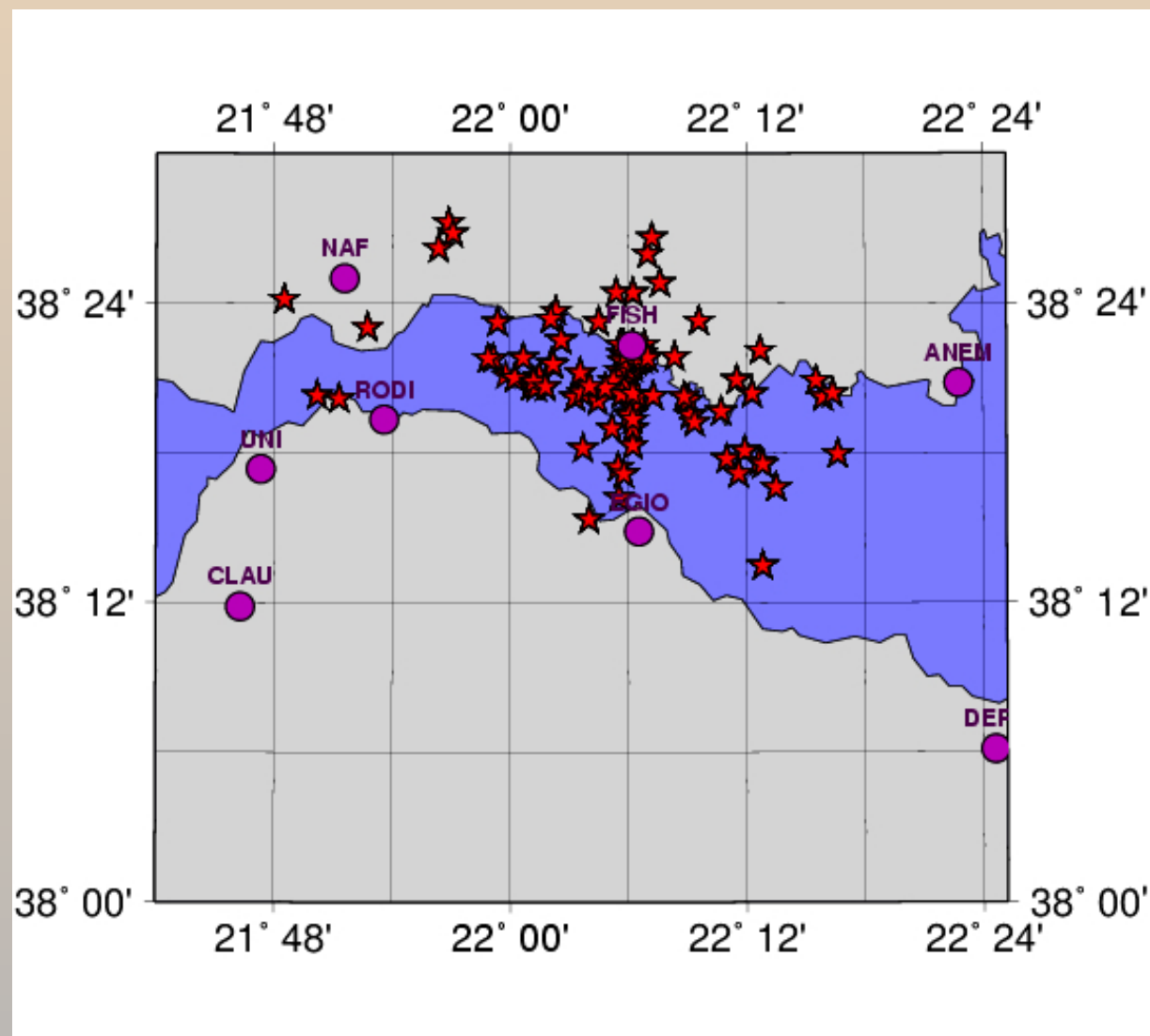
## Zagadnienie odwrotne (ogólnie)

zagadnienie odwrotne

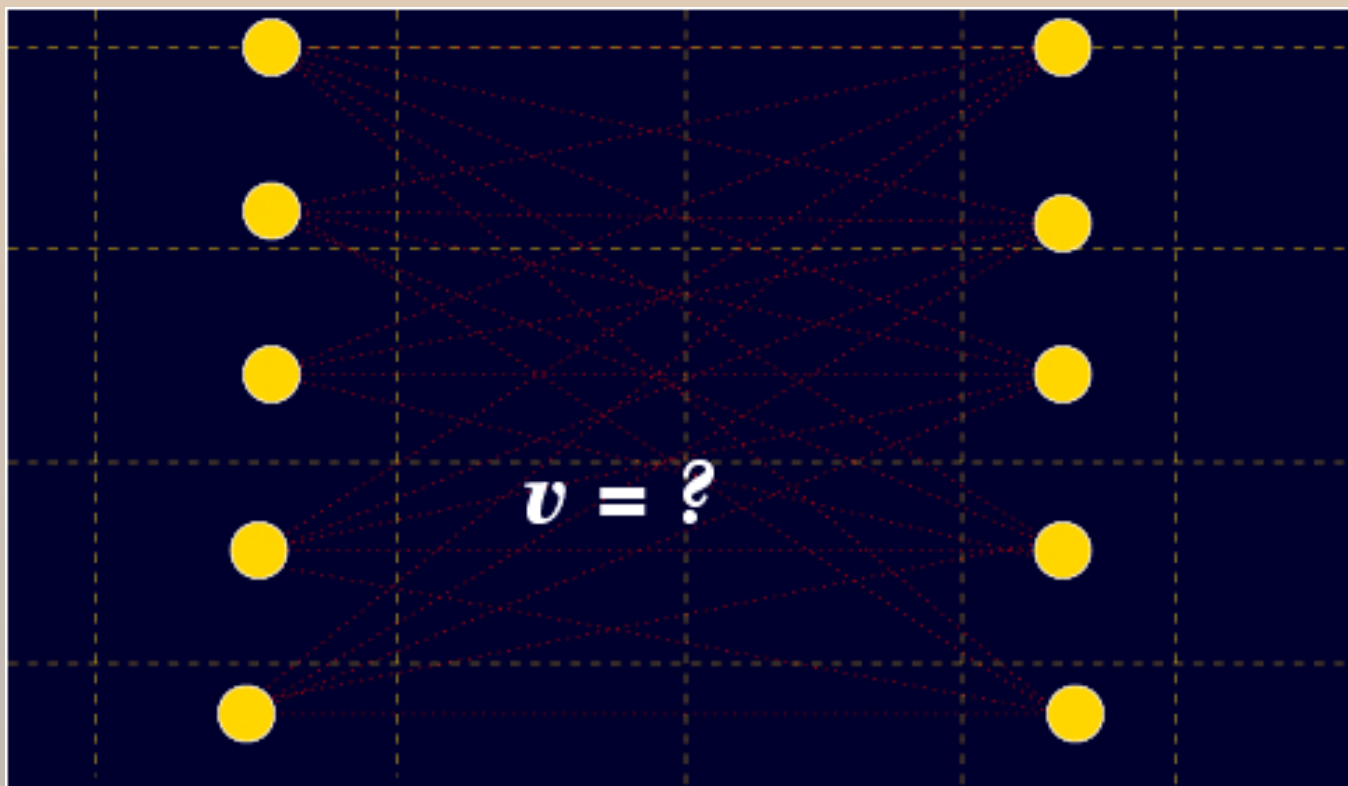


proces wnioskowania

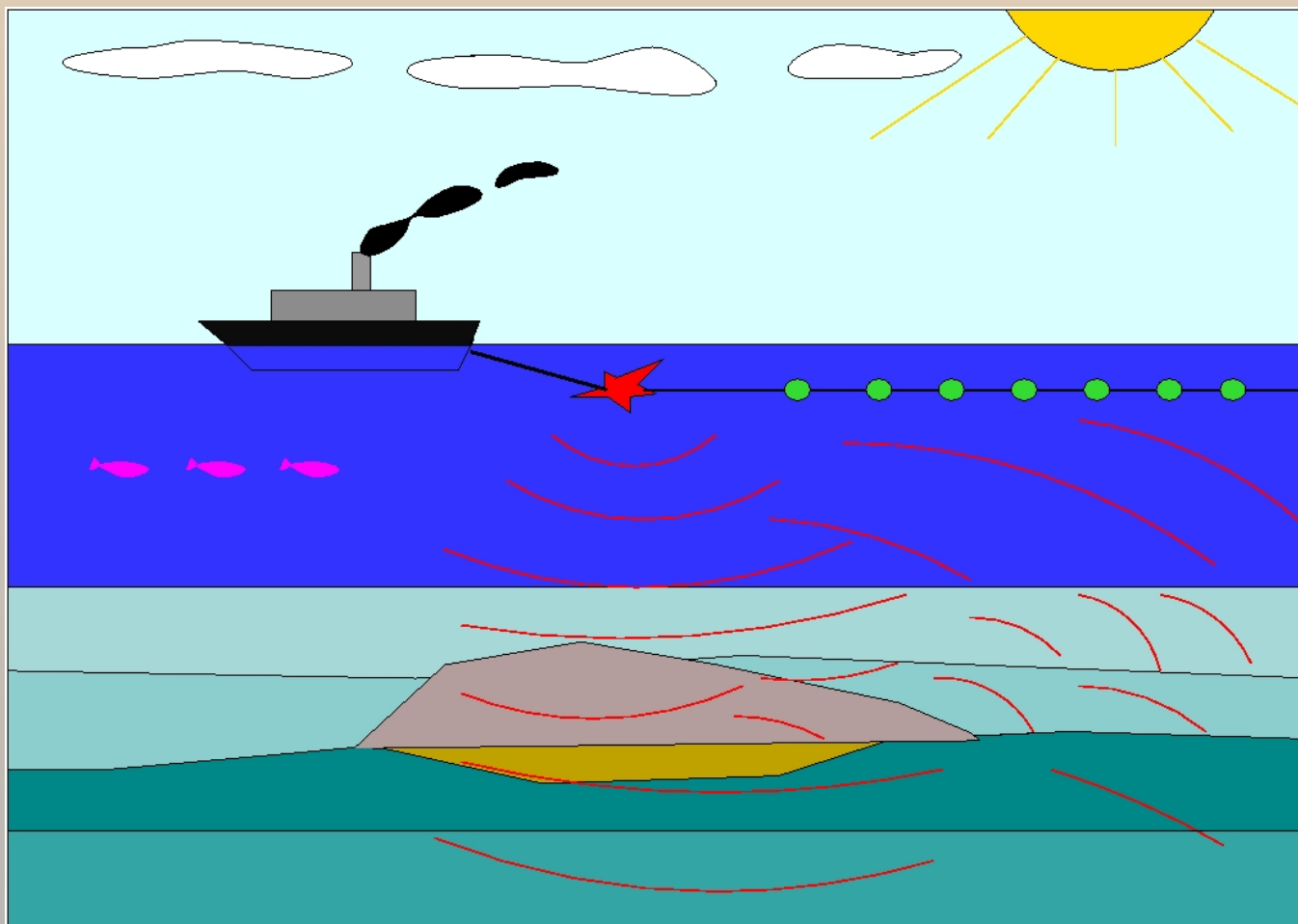
## Przykład 1.- lokalizacja



## Przykład 2.- tomografia sejsmiczna



## Przykład 3.- wybór parametryzacji



## Zagadnienia odwrotne - uogólnione pomiary

$$\mathbf{m} = ? \implies \mathbf{d}^{obs} \implies \mathbf{d}^{obs} \Rightarrow \mathbf{m}$$

---

$$||\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{d}^{th}(\mathbf{m})|| + \lambda ||\mathbf{m}^{ml} - \mathbf{m}^{apr}|| = \min$$

---

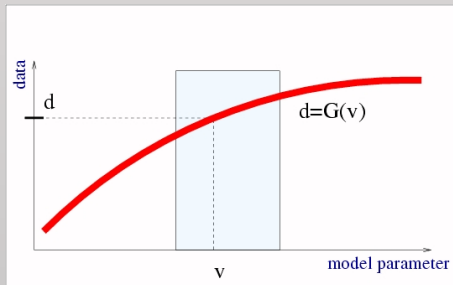
$$\mathbf{m}^{true} = \mathbf{m}^{ml} + \epsilon_{\mathbf{m}} \quad \epsilon_{\mathbf{m}} = ???$$

# Stosowane Algorytmy

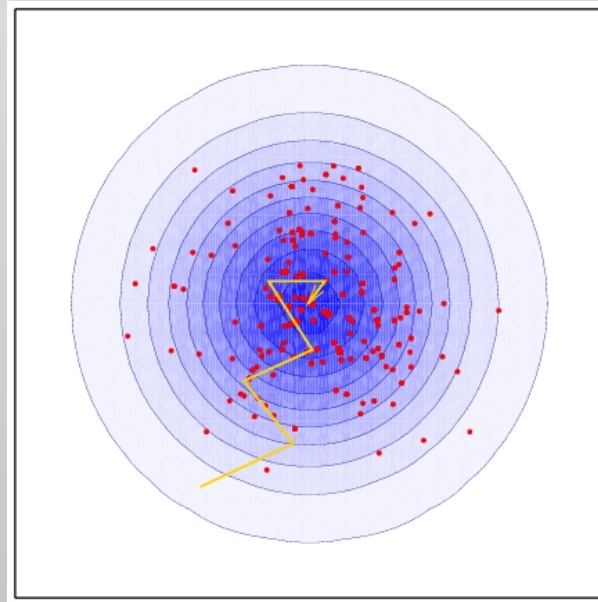
| Metoda                                                                                                          | Zalety                 | Ograniczenia              |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|---------------------------|
| Algebraiczna (LSQR)                                                                                             | - Prostota             | - tylko problemy liniowe  |
| $\mathbf{m}^{ml} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \gamma \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{d}^{obs}$      | - wielkoskalowe        | - czułe na błędy          |
| Optymalizacyjna                                                                                                 | - Prostota             | - brak oszacowania błędów |
| $S(\mathbf{m}) = \ \mathbf{d}^{th}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}^{obs}\  + \gamma \ \mathbf{m} - \mathbf{m}^{apr}\ $ | - nieliniowa           |                           |
| Probabilistyczna                                                                                                | - nieliniowa           | - złożona teoria          |
| $\sigma(\mathbf{m}) = f(\mathbf{m}) L(\mathbf{m}, \mathbf{d}^{obs})$                                            | - pełna analiza błędów | - Efektywne próbkowanie   |



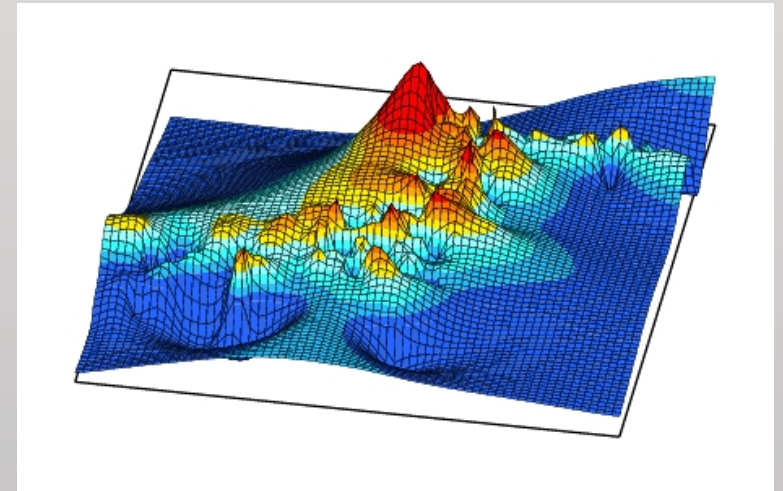
# Porównanie algorytmów



Algebraiczny  
(Odwrotna projekcja)



Optymalizacyjny  
(Przeszukiwanie przestrzeni)



Bayesowski

# Probabilistyczny opis informacji

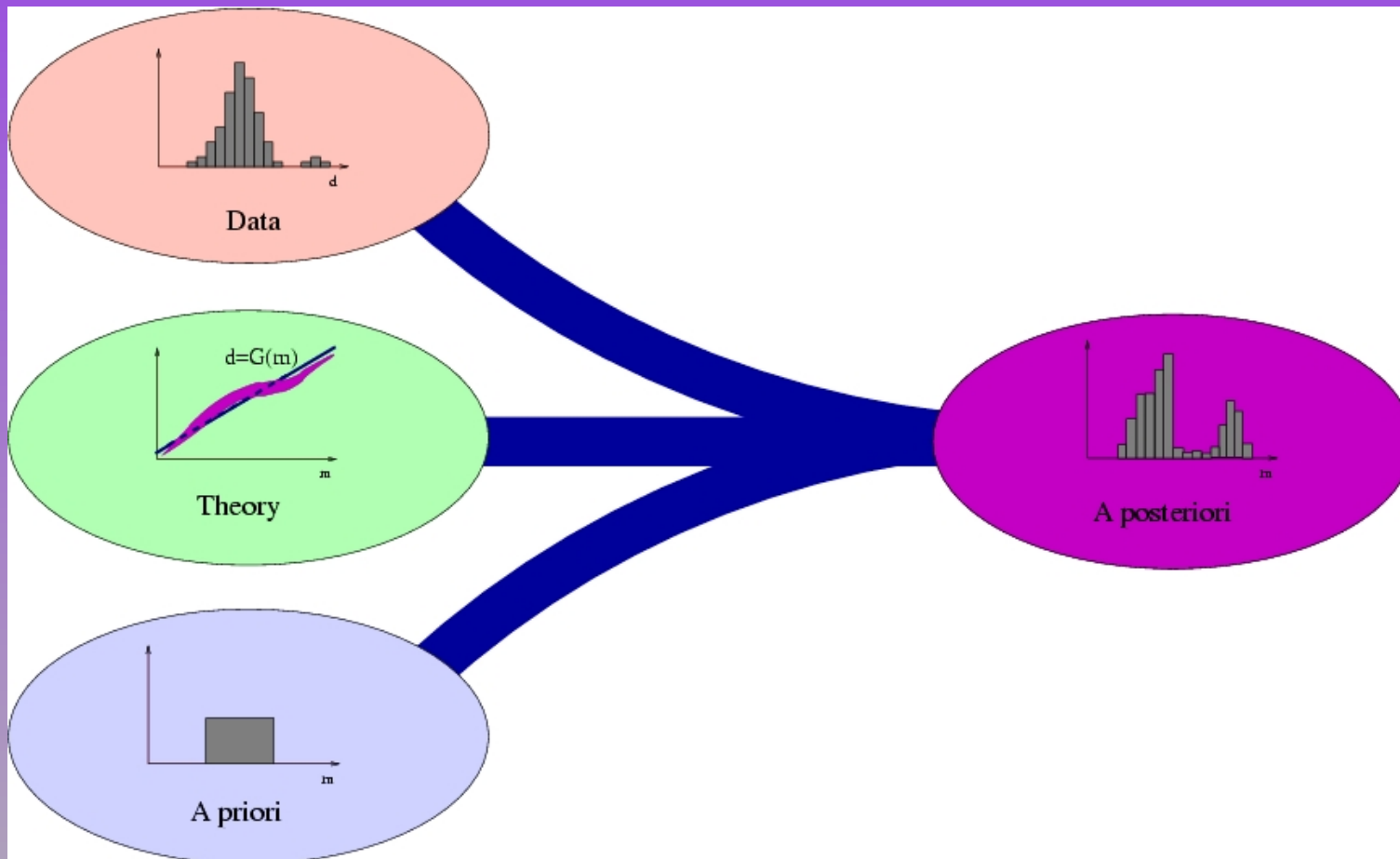
posiadana  
informacja  $\Leftrightarrow$  rozkład  
prawdopod.

Postulat:

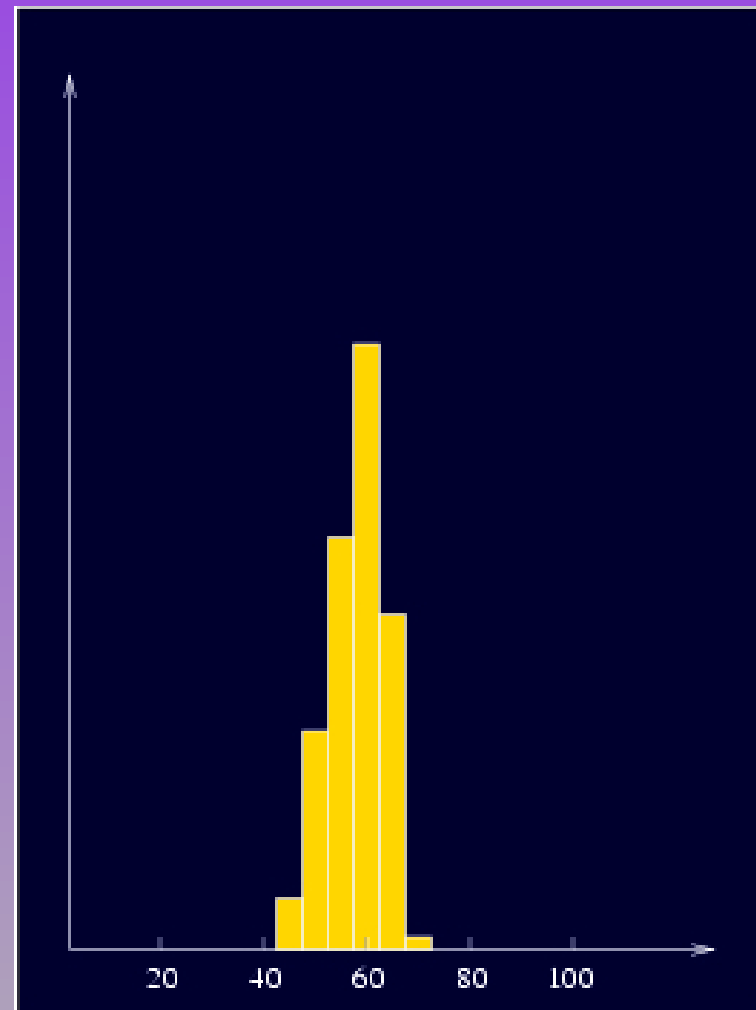
Każdą posiadaną informację możemy ilościowo opisać przy pomocy pewnego rozkładu prawdopodobieństwa:

# Inwersja - łączenie informacji

(Wnioskowanie statystyczne)

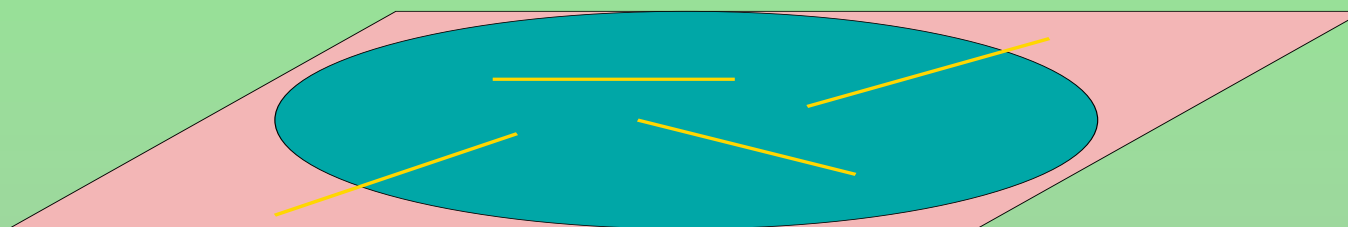


# Przykład wnioskowania rozwiązania problemu odwrotnego

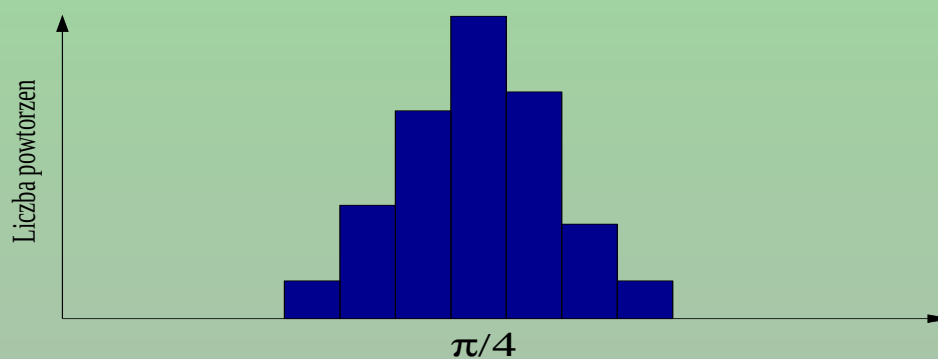


# Prawdopodobieństwo - podstawy

## powierzchnia koła

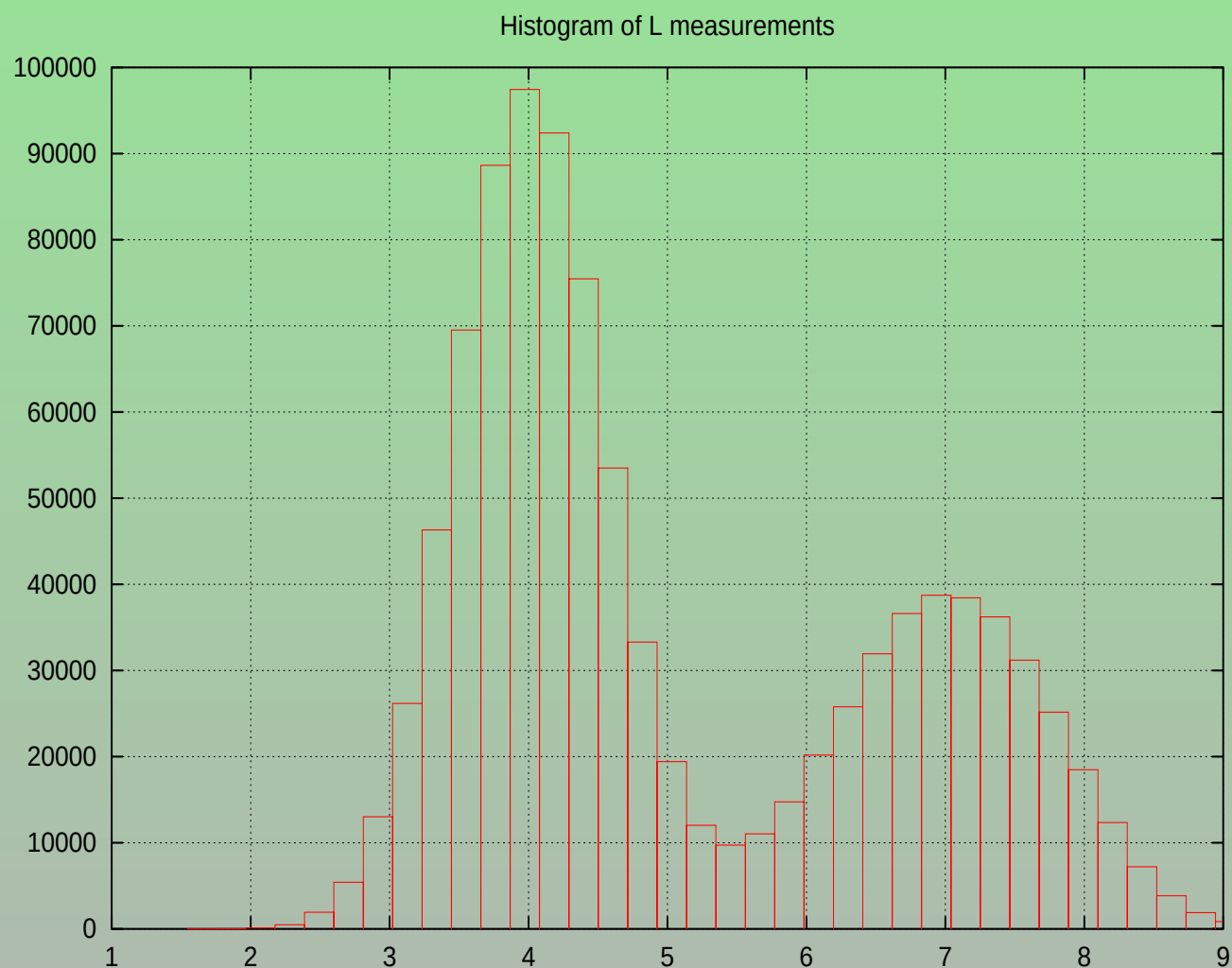


$$p = N_p/N$$



$$P(A) = \frac{N_i}{N_{\text{tot}}} \left[ = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4} \right]$$

# Prawdopodobieństwo - procesy losowe



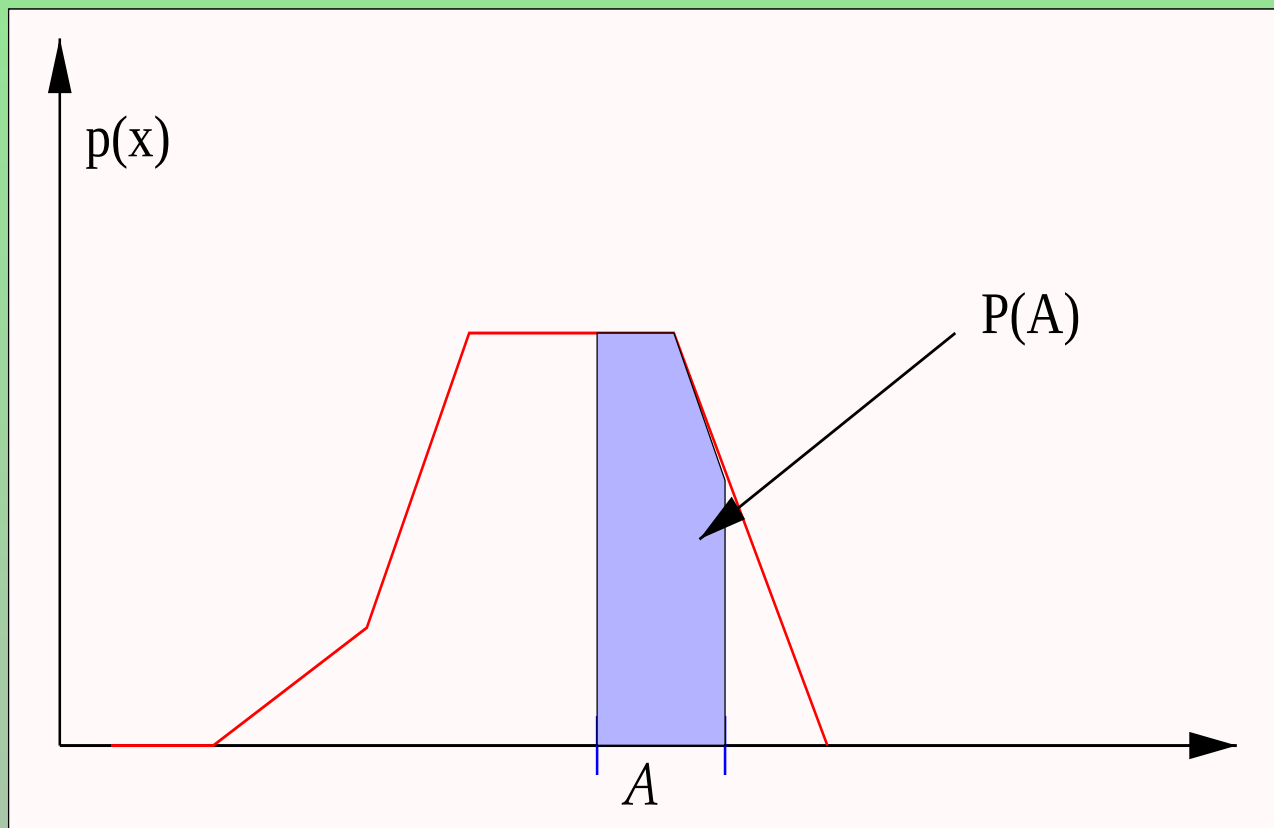


# Podstawy aksjomatyczne (Kołomogorow)

- ❖ funkcja: zdarzenie  $\implies p \geq 0$
- ❖ prawdopodobieństwo zdarzenia pustego:  $p = 0$
- ❖ prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia:  $p = 1$
- ❖ jeżeli jest sumą niezależnych zdarzeń

$$P(A = \cup A_i) = \sum_i P(A_i)$$

# Gęstość prawdopodobieństwa



$$P(A) = \int_A p(x) dx$$



# Opis gęstości prawdopodobieństwa (pdf)

ang.: probability density function

❖ Normalizacja

$$\int_X p(x) dx = 1$$

❖ Wartość średnia

$$\bar{x} = \langle x \rangle = \int_X x p(x) dx$$

❖ Dyspersja

$$\sigma^2 = \langle (x - \bar{x})^2 \rangle = \int_X (x - \bar{x})^2 p(x) dx$$

❖ Momenty wyższego rzędu

# Rozkłady wielowymiarowe

❖ Normalizacja

$$\int_X \int_Y p(x, y) dx dy = 1$$

❖ Wartość średnia/rozkłady brzegowe

$$\bar{x} = \int_{XY} x p(x, y) dx dy$$

$$p_x(x) = \int_Y p(x, y) dy$$

$$\bar{x} = \int_X x p_x(x) dx$$

# Rozkłady wielowymiarowe

## macierz kowariancji

$$\sigma_{xy} = \int_{XY} (x - \bar{x})(y - \bar{y})p(x, y)dx dy$$

$$\sigma_x^2 = \int_{XY} (x - \bar{x})(x - \bar{x})p(x, y)dx dy$$

$$\sigma_y^2 = \int_{XY} (y - \bar{y})(y - \bar{y})p(x, y)dx dy$$

$$cov = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$



## Rozkłady brzegowe i warunkowe

$$p(x, y)$$

$$\blacklozenge p_x(x) = \int_Y p(x, y) dy$$

$$\blacklozenge p_y(y) = \int_X p(x, y) dx$$

$$\blacklozenge p_{x|y}(x|y) = p(x, y) / p_y(y)$$

$$\blacklozenge p_{y|x}(y|x) = p(x, y) / p_x(x)$$

## Rozkłady brzegowe i warunkowe

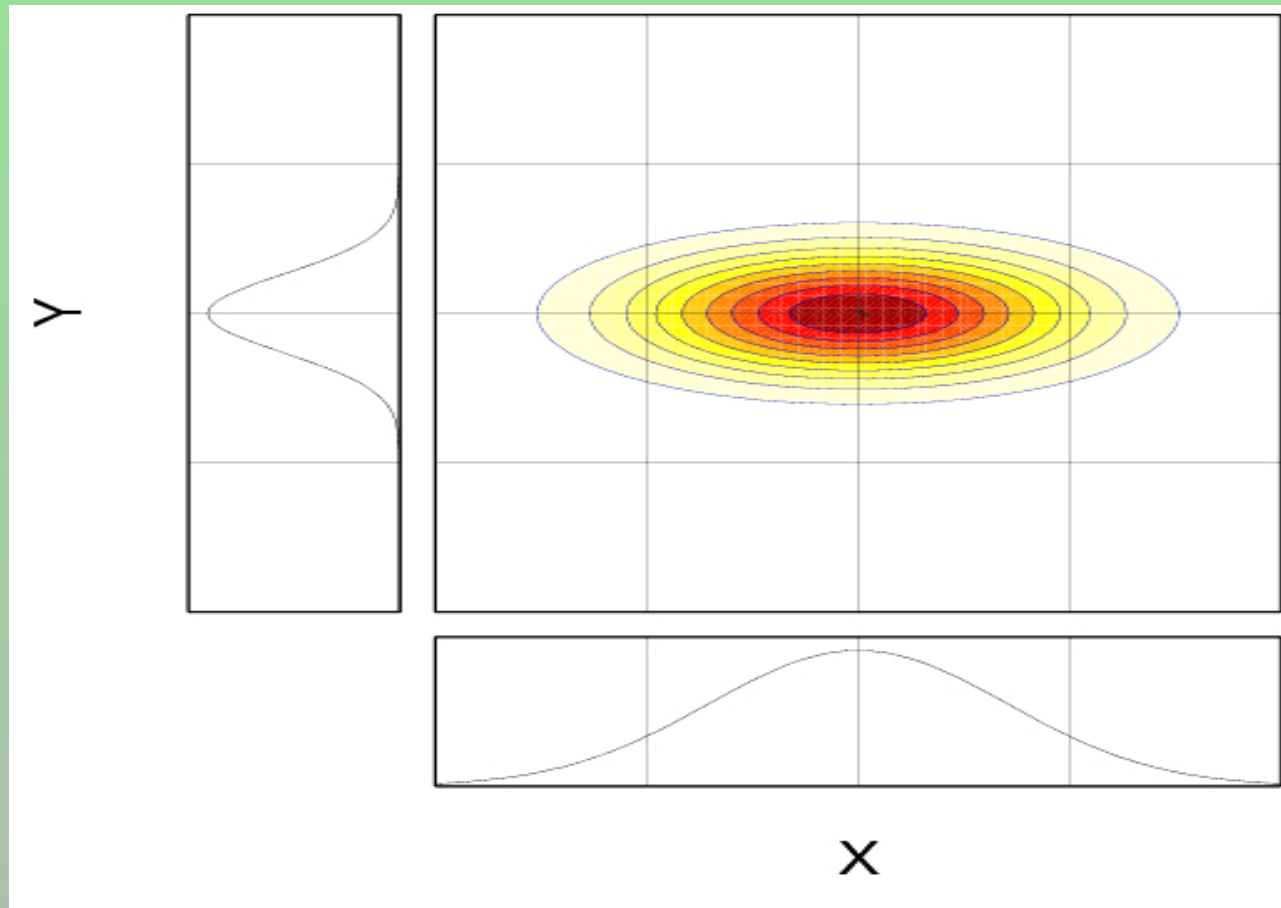
$$p(x, y) = p_{x|y}(x|y)p_y(y)$$

$$p(x, y) = p_{y|x}(y|x)p_x(x)$$

$$p_{x|y}(x|y)p_y(y) = p_{y|x}(y|x)p_x(x)$$

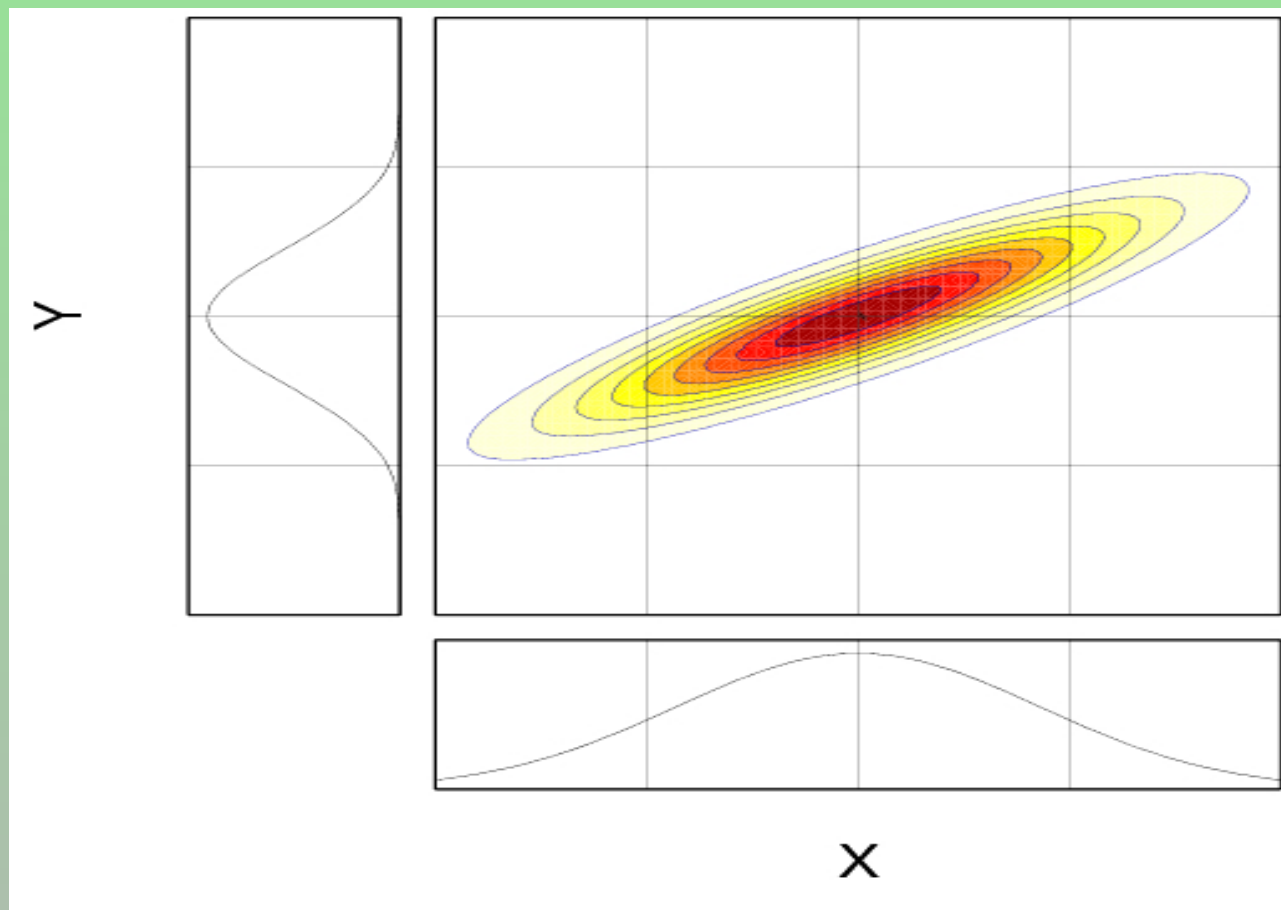
## Przykład A

$$p(x, y) = p_x(x)p_y(y)$$

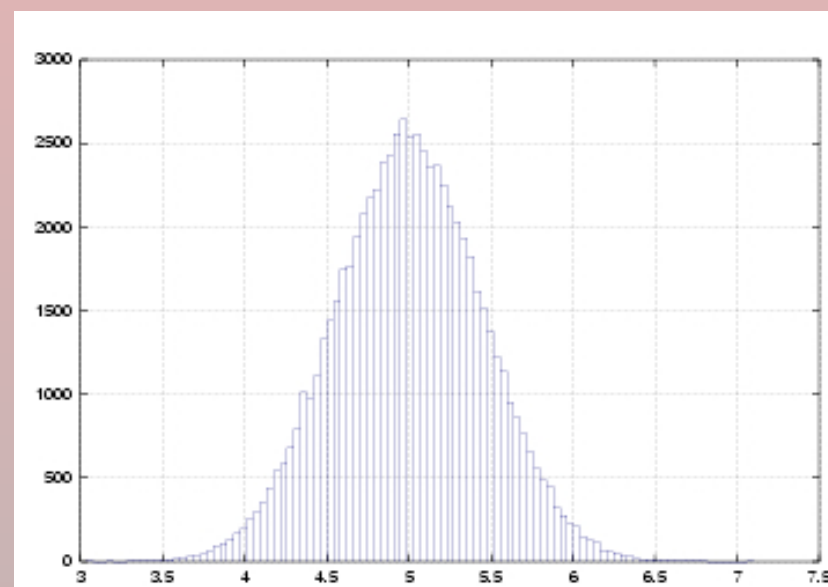
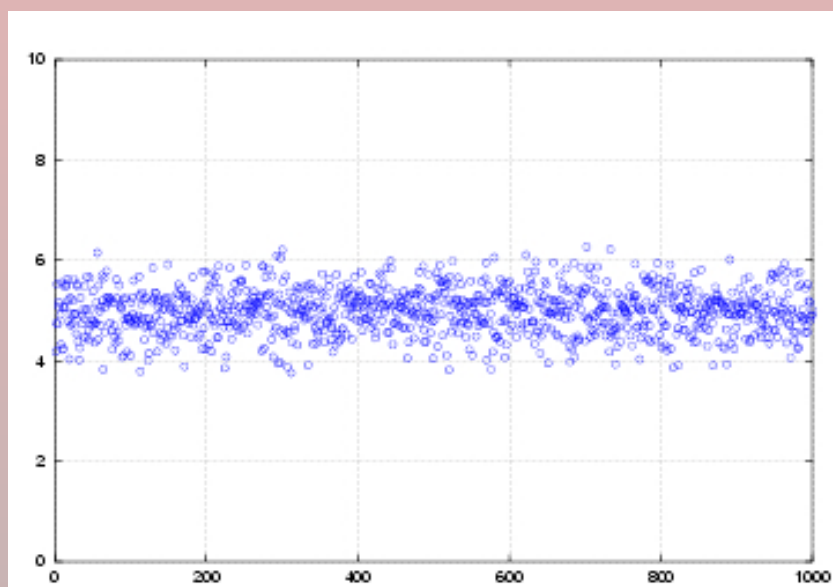


## Przykład B

$$p(x, y) \neq p_x(x)p_y(y)$$



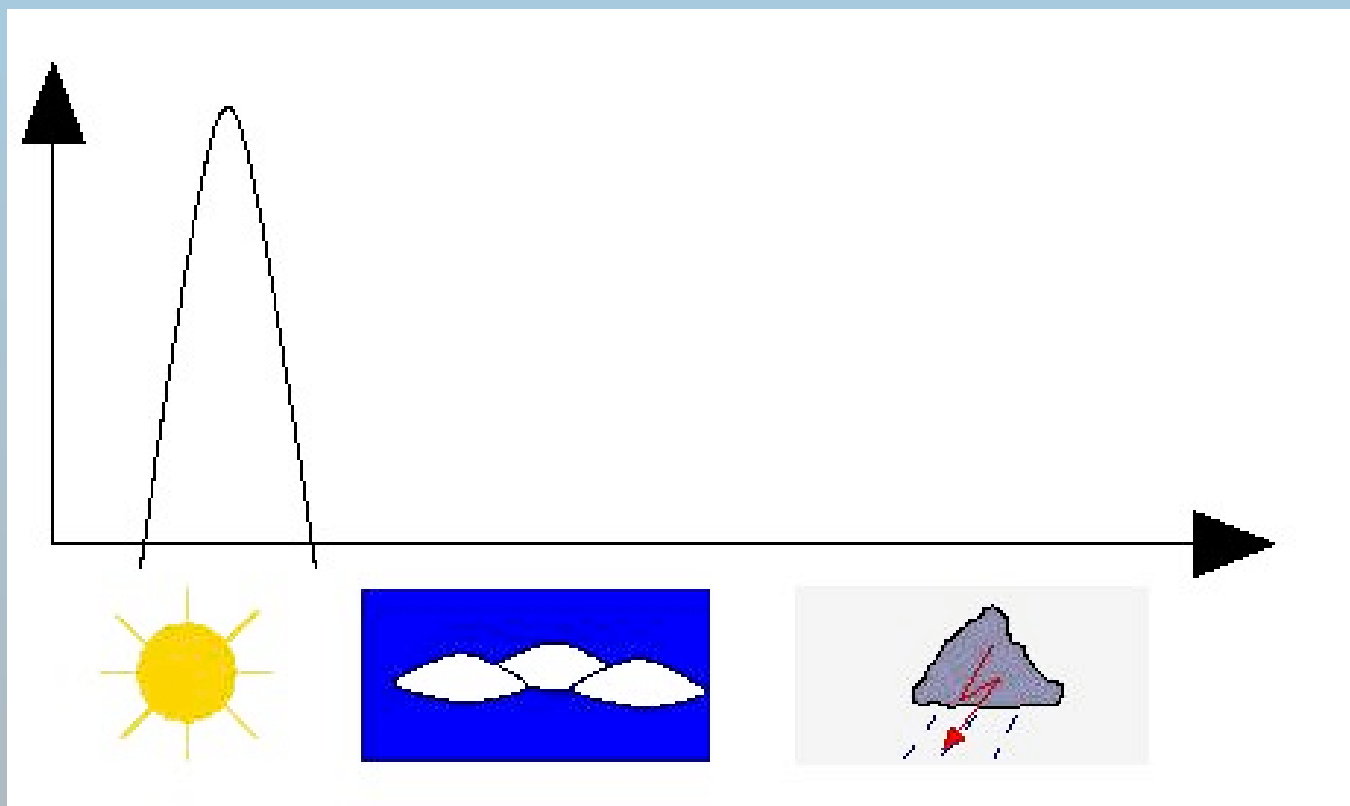
# “Klasyczna” interpretacja



# Interpretacja Bayesowska (a)



# Interpretacja Bayesowska (a)

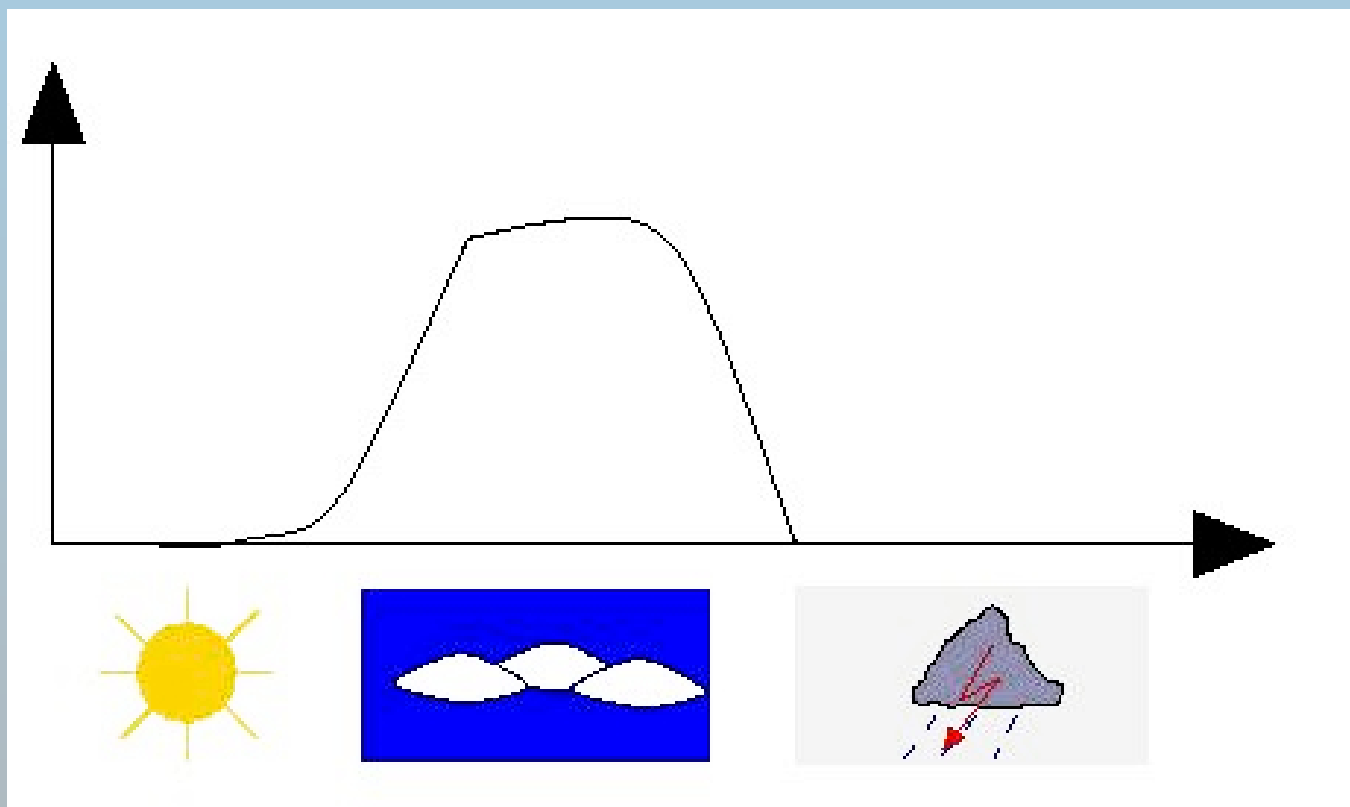


## Interpretacja Bayesowska (b)





## Interpretacja Bayesowska (b)



## Interpretacja Bayesowska (b)



# Interpretacja Bayesowska (b)

