

WITOLD G. STRUPCZEWSKI, JAROSŁAW J. NAPIÓRKO WSKI

Instytut Geofizyki PAN – Warszawa

**ROZKŁADY MAKSYMALNYCH SEZONOWYCH WYSOKOŚCI
OPADÓW ATMOSFERYCZNYCH
I ICH SUM NA PODSTAWIE MODELU SERII CZASOWEJ**

DISTRIBUTION OF MAXIMUM SEASONAL STORM DEPTHS
AND TOTAL PRECIPITATION FROM SEQUENCES MODEL

W celu osiągnięcia wzajemnej niesprzeczności rozkładów dowolnych charakterystyk statystycznych punktowych opadów atmosferycznych należałoby dążyć do wyznaczenia tych rozkładów z modelu matematycznego dla serii czasowej pojedynczych opadów. Model taki powinien realizować pewien kompromis między dokładnością odwzorowania istotnych cech procesu a prostotą jego wykorzystania. W szczególności pożądaną jest, aby wynikające z niego rozkłady popularnych zmiennych opadowych wyrażały się analitycznie.

Brak modelu serii czasowej był szczególnie silnie dostrzegany przy wyznaczaniu rozkładu prawdopodobieństwa maksymalnych rocznych wysokości deszczów nawalnych. Pomijanie przy jego wyznaczaniu wszystkich opadów mniejszych od maksymalnych w poszczególnych latach odczuwane było jako utrata informacji zawartej w dostępnym materiale obserwacyjnym. Odczucie to znalazło potwierdzenie teoretyczne w modelu wystąpień opadu jako stacjonarnego procesu Poissona i wzajemnej niezależności wysokości pojedynczych opadów w serii czasowej (Strupczewski, 1967a).

Modele procesu Poissona dla opadów w punkcie znalazły szerokie zastosowanie (Eagleson, 1978; Ison, Feyerherm, Bark, 1971; Strupczewski, 1967a; Todorovic, Yevjevich, 1969), godząc dobrze prostotę i analityczność rozwiązań z ogólnością opisu. Najbardziej ogólne ich ujęcie podaje T o d o r o v i c (Todorovic, Yevjevich, 1969), traktując wysokości pojedynczych opadów punktowych jako rozłożone wykładniczo z rocznie okresową średnią wysokością. Podobną okresowość przypisał on częstotliwości w procesie Poissona dla serii opadowej.

W niniejszej pracy oparto się na założeniu stacjonarności, zajmując się wyznaczeniem rozkładów prawdopodobieństwa sezonowych pojedynczych opadów maksymalnych i sumy opadów sezonowych.

[25]

Model procesu opadów deszczowych

Czas trwania pojedynczego opadu w punkcie jest na ogół krótszy od przerwy między opadami. Przyjęcie stosunku tych wartości jako bliskiego zera prowadzi, wobec skończonej wartości mianownika, do przedstawienia sekwencji opadowej w postaci ciągu impulsów o wielkościach odpowiadających wysokości poszczególnych opadów deszczu. Załóżmy, że postępujące po sobie pojedyncze opady są niezależne, tj. że fakt wystąpienia w dowolnej chwili t opadu o wysokości X nie ma wpływu na czas wystąpienia i wysokość następnego opadu. W szczególności pozwala to na niezależne modelowanie procesu wystąpienia opadów i rozkładu ich wysokości. Przyjmijmy również, że w analizowanym okresie wpływ sezonowości na rozkład w czasie pojedynczych opadów i ich wysokość może być pominięty.

Model procesu wystąpienia opadów

Konsekwencją poczynionych założeń jest przyjęcie stacjonarnego procesu Poissona dla procesu wystąpień pojedynczych opadów w pewnym okresie roku o długości T . Prawdopodobieństwo wystąpienia w tym okresie dokładnie k pojedynczych opadów wyrazi się wówczas poprzez rozkład Poissona

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

gdzie

$$m(k) = \lambda = \omega T \quad (2)$$

średnia częstość opadów, natomiast ω – ich częstotliwość. Wariancja rozkładu równa jest

$$\sigma^2(k) = \lambda \quad (3)$$

Prawdopodobieństwo wystąpienia przerwy między opadami dłuższej niż τ otrzymuje się z (1) jako równe

$$P(t > \tau) = \frac{(\omega\tau)^0}{0!} \cdot e^{-\omega\tau} = e^{-\omega\tau} \quad (4)$$

a stąd funkcja gęstości prawdopodobieństwa przerw

$$f(\tau) = \omega e^{-\omega\tau} \quad (5)$$

Średnia wartości i wariancja tego rozkładu wynoszą odpowiednio

$$m(\tau) = \omega^{-1} \quad (6)$$

$$\sigma^2(\tau) = \omega^{-2} \quad (7)$$

Rozkład wysokości pojedynczych opadów

Zgodnie z poczynionym założeniem przyjmijmy, że rozkład ten jest stacjonarny dla $t \in (0, T)$. Załóżmy, że jest to rozkład typu wykładniczego o funkcji gęstości

$$g(x) = \alpha \exp(-\alpha x) \quad \alpha > 0, \quad 0 \leq x \leq \infty \quad (8)$$

i dystrybuancie

$$G(x) = 1 - p^*(x) = 1 - \exp(-\alpha x) \quad (9)$$

gdzie $p^*(x)$ – prawdopodobieństwo przewyższenia wartości x w zbiorze pojedynczych opadów. Z rozkładu tego łatwo określić wartość średnią

$$m(x) = \alpha^{-1} \quad (10)$$

oraz wariancję

$$\sigma^2(x) = \alpha^{-2} \quad (11)$$

Uzasadnieniem wyboru tego rozkładu jest dobra aproksymacja wyników obserwacji oraz łatwość analitycznych przekształceń.

Niekiedy w zestawieniach materiałów obserwacyjnych pomija się opady o małych wysokościach, mając na względzie błędy ich oceny oraz dużą częstość występowania takich opadów. W takim przypadku (8) i (9) przyjmą postać

$$g_\varepsilon(x) = \alpha \exp[-\alpha(x - \varepsilon)] \quad \varepsilon \leq x \leq \infty \quad (8a)$$

$$G_\varepsilon(x) = 1 - p_\varepsilon^*(x) = 1 - \exp[-\alpha(x - \varepsilon)] \quad (9a)$$

z wartością średnią i wariancją

$$m_\varepsilon(x) = \varepsilon + \alpha^{-1} \quad (10a)$$

$$\sigma_\varepsilon^2(x) = \alpha^{-2} \quad (11a)$$

gdzie ε – wartość progowa.

Równanie (1) pozwala wyznaczyć prawdopodobieństwo k -krotnego wystąpienia opadu w okresie T . Dokonamy obecnie jego uogólnienia, wyznaczając prawdopodobieństwo k -krotnego wystąpienia opadu o wydajności przekraczającej x . Sytuacja taka może wystąpić w wyniku wystąpienia $k, k+1, \dots$ pojedynczych opadów, z których k przekracza poziom x . Jej prawdopodobieństwo wyrażać się będzie jako prawdopodobieństwo alternatywy zdarzeń wyłączających się:

$$\begin{aligned} P_x(k) &= \sum_{i=0}^{\infty} P(k+i) \cdot (p^*)^k \cdot (1-p^*)^i \cdot \binom{k+i}{k} = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot (p^*)^k \cdot e^{-\lambda} \left[1 + \frac{\lambda}{k+1} (1-p^*) \frac{(k+1)}{k! 1!} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \dots \frac{\lambda^i k!}{(k+i)!} \cdot (1-p^*)^i \cdot \frac{(k+i)}{k! i!} + \dots \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(\lambda p^*)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \left[1 + \frac{\lambda(1-p^*)}{1!} + \dots + \frac{\lambda^i(1-p^*)^i}{i!} + \dots \right] = \\
 &= \frac{(\lambda p^*)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda(1-p^*)} = \frac{(\lambda p^*)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda p^*}
 \end{aligned} \quad (12)$$

Jak widać, rozkład ilości wystąpień opadów o wydajności przewyższającej poziom x jest, podobnie jak w przypadku gdy $x = 0$ (vide wzór (1)), rozkładem Poissona. Średnia częstość wystąpienia takich opadów jest równa

$$\lambda_x = \lambda p^*(x) \quad (13)$$

Równanie

$$P_x(k) = \frac{\lambda_x^k}{k!} e^{-\lambda_x} \quad (14)$$

jest uogólnieniem równania (1) na dowolne poziomy przewyższenia. W szczególności podstawiając $x = \varepsilon$ stwierdzamy, że rozkład ilości wystąpień opadów pozostaje rozkładem Poissona, niezależnie od sposobu zdefiniowania zjawiska, tj, niezależnie od wartości progowej ε , jeżeli dla $\varepsilon = 0$ słuszne są poczynione w pracy założenia.

Uogólnijmy jeszcze wzór (13) na dowolną wartość progową ε definiującą zjawisko. Prawdopodobieństwo przewyższenia wartości x przy ograniczeniu zbioru obserwacyjnego na poziomie ε można wyrazić przez prawdopodobieństwo przewyższenia przy ograniczeniu zerowym jako

$$p_\varepsilon^*(x) = \frac{p^*(x)}{p^*(\varepsilon)} \quad (15)$$

Podstawiając (15) do (13) otrzymujemy żądane uogólnienie

$$\lambda_x = \lambda_\varepsilon \cdot p_\varepsilon^*(x); \quad 0 \leq \varepsilon \leq x \quad (16)$$

Opady o największych wysokościach

Prawdopodobieństwo niewystąpienia w okresie T pojedynczego opadu o wysokości przekraczającej x otrzymujemy, podstawiając do (14) $k = 0$. Stąd prawdopodobieństwo przewyższenia wyraża się jako

$$p(x) = 1 - P_x(0) = 1 - e^{-\lambda_x} = 1 - e^{-\lambda_\varepsilon x} \quad (17)$$

a uwzględniając (16)

$$p(x) = 1 - e^{-\sum \lambda_\varepsilon^* p_\varepsilon^*(x)}; \quad 0 \leq \varepsilon \leq x \quad (18)$$

Równanie (18) wiąże roczne prawdopodobieństwo przewyższenia $p(x)$ poziomu x z częstością występowania zjawiska (λ_ε) i z prawdopodobieństwem przewyższenia w

zbiorze wszystkich opadów $[P_c^*(x)]$. Wyrażając prawdopodobieństwo przewyższenia poprzez dystrybuantę, otrzymujemy

$$F(x) = e^{-\lambda_\varepsilon [1 - G_\varepsilon(x)]} \quad \text{dla } x > \varepsilon \quad (19)$$

$$F(\varepsilon) = e^{-\lambda_\varepsilon} \quad \text{dla } x = \varepsilon$$

co różniczkując względem x daje funkcję gęstości

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \lambda_\varepsilon \cdot g_\varepsilon(x) F(x) \quad \text{dla } x > \varepsilon \\ \text{plus impuls} & \\ P(\varepsilon) &= e^{-\lambda_\varepsilon} \quad \text{dla } x = \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Jest to rozkład dyskretno-ciągłej zmiennej losowej.

Podstawiając do (19) i (20) w miejsce $g_\varepsilon(x)$ i $G_\varepsilon(x)$ wzory (8a) i (9a) na wykładniczą funkcję rozkładu, otrzymujemy odpowiednio

$$F(x) = \exp[-\lambda_\varepsilon \exp[-\alpha(x - \varepsilon)]] \quad \text{dla } x > \varepsilon \quad (19a)$$

$$F(x) = e^{-\lambda_\varepsilon} \quad \text{dla } x = \varepsilon$$

oraz

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \alpha \lambda_\varepsilon \exp[-\alpha(x - \varepsilon) - \lambda_\varepsilon \exp[-\alpha(x - \varepsilon)]] \quad \text{dla } x > \varepsilon \\ \text{plus impuls} & \\ P(x = \varepsilon) &= e^{-\lambda_\varepsilon} \quad \text{dla } x = \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (20a)$$

Ciągła część rozkładu wyraża się funkcją rozkładu Fishera-Tippetta (typ I), często stosowaną w hydrologii jako funkcja rozkładu prawdopodobieństwa maksimumów. Tak więc jeżeli wysokości opadu podlegają rozkładowi wykładniczemu, a ilości wystąpień opadu – rozkładowi Poissona, to przy poczynionych założeniach o stacjonarności i wzajemnej niezależności rozkład opadów maksymalnych jest uciętym rozkładem Fishera-Tippetta (typ I).

Nietrudno zauważyć, że słuszne jest również stwierdzenie odwrotne. Jeżeli wysokości sezonowych opadów maksymalnych podlegają uciętemu rozkładowi F-T (typ I), to przy przyjętych założeniach rozkład prawdopodobieństwa wysokości pojedynczych opadów jest rozkładem wykładniczym o dolnym ograniczeniu równym wartości progowej definiującej zjawisko.

Rozkład F-T (typ I) otrzymano oryginalnie jako graniczny rozkład wartości maksymalnej z niezależnej próby zmiennej losowej o rozkładzie należącym do pewnej klasy (Gumbel, 1954; Kaczmarek, 1970). Próbę taką uzyskuje się przy braku cyklicznych zmian w ciągu roku oraz przy niezależności wyników kolejnych obserwa-

cji. Natomiast droga, na której tu otrzymano rozkład F-T (typ I), jest bliższa praktyce hydrometeorologicznej. Niezależność pojedynczych opadów w serii czasowej jest bardziej uzasadniona niż niezależność obserwacji dokonywanych w regularnych niewielkich odstępach czasu.

Estymacja kwantyli i jej błąd

Przekształćmy (19) do postaci umożliwiającej znalezienie estymaty kwantyla o zadanym prawdopodobieństwie przewyższenia

$$\hat{x}_p = \frac{1}{\hat{\alpha}} (\ln \hat{\lambda}_e + y_p) + \varepsilon \quad \text{dla } p \leq 1 - e^{-\hat{\lambda}} \quad (21)$$

gdzie

$$y_p = -\ln[-\ln(1-p)] \quad (22)$$

natomiast „ $\hat{\cdot}$ ” nad parametrem oznacza, że parametr ten jest szacowany z próby losowej. Oszacowań parametrów λ i α dokonuje się na podstawie niezależnych źródeł informacji, a więc błędy tych oszacowań są nieskorelowane. Parametr λ jest szacowany na podstawie liczby (M) wystąpień zjawiska w danym N -letnim okresie, natomiast parametr α z M -elementowego obserwacyjnego zbioru wysokości pojedynczych opadów, przy czym pomiędzy ilością pojedynczych opadów a ich wysokością nie ma zależności.

Stosując dla estymacji metodę największej wiarygodności, otrzymujemy

$$\hat{\lambda}_e = \frac{M}{N} \quad (23)$$

z wariancją

$$\sigma^2(\hat{\lambda}_e) = \frac{1}{N} \quad (24)$$

oraz

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{E(x) - \varepsilon} \quad (25)$$

z wariancją

$$\sigma^2(\hat{\alpha}) = \frac{\alpha^2}{M} = \frac{\alpha^2}{N\lambda} \quad (26)$$

Wariancja oszacowania kwantyla x_p wynosi

$$\sigma_{\lambda, N}^2(x_p) = \xi(\lambda_e, p) \frac{1}{\alpha^2 N} \quad (27)$$

gdzie

$$\xi(\lambda_e, p) = \frac{1}{\lambda_e} (\ln \lambda_e + y_p)^2 + \frac{1}{\lambda_e^2} \quad (28)$$

Wyznaczamy teraz dla porównania wariancję oszacowania kwantyla x_p na podstawie serii maksymalnych rocznych wysokości pojedynczych opadów. Podstawiając do (21)

$$\ln \hat{\lambda}_e = -\hat{\alpha}(\varepsilon - \hat{u}) \quad (29)$$

otrzymujemy

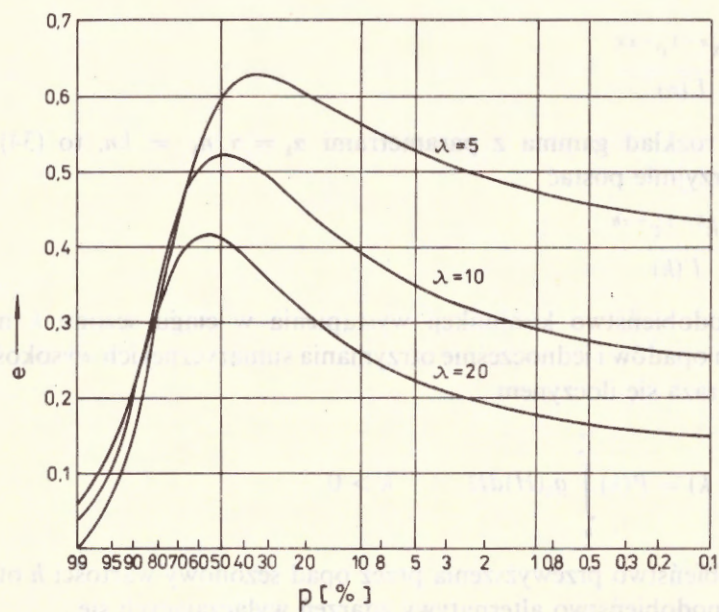
$$\hat{x}_p = \hat{u} + \frac{1}{\hat{\alpha}} y_p \quad (30)$$

Wariancja oszacowania kwantyla (30) metodą największej wiarygodności (Kaczmarek, 1960)

$$\sigma_N^2(x_p) = \xi(p) \frac{1}{\alpha^2 N} \quad (31)$$

gdzie

$$\xi(p) = 1 + \frac{6}{\pi^2} (1 - C + y_p)^2 \quad (32)$$



Rys. 1. Efektywność względna estymacji kwantyli rozkładu maksymalnych sezonowych wysokości opadów

Fig. 1. Relative efficiency of quantile estimation from distribution of maximum seasonal storm depths

$C = 0,57722\dots$ – liczba Eulera.

Stosunek wariancji (27) do (31)

$$e = \frac{\xi(\lambda, p)}{\xi(p)} \quad (33)$$

stanowi miarę efektywności względnej metody. Można go interpretować jako stosunek długości okresów obserwacji, wyrażonej liczbą lat, przy którym uzyskuje się tę samą dokładność w obu przypadkach. Wykresy efektywności względnej kilku wybranych częstości λ przedstawił na podziałce F-T (typ I) na rys. 1.

Sezonowa suma opadów

Opad sezonowy o wysokości h może powstać jako rezultat wystąpienia $k = 1, 2, 3, \dots$ pojedynczych opadów niezależnych. Prawdopodobieństwo $P(k)$ tego, że dokładnie k opadów wystąpi w danym okresie, określone jest przez (1). Natomiast gęstość prawdopodobieństwa łącznego opadu o wysokości h , pod warunkiem wystąpienia k pojedynczych niezależnych opadów, można wyznaczyć jako sumę k niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie (8)

$$g_k(h) = g_k(H = x_1 + x_2 + \dots + x_k) \quad (34)$$

Ponieważ suma k niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie gamma z parametrami α i n

$$g(x) = \frac{\alpha^n x^{n-1} e^{-\alpha x}}{\Gamma(n)} \quad (35)$$

ma również rozkład gamma z parametrami $\alpha_k = \alpha$, $n_k = kn$, to (34) w naszym przypadku przyjmie postać

$$g_k(h) = \frac{\alpha^k h^{k-1} e^{-\alpha h}}{\Gamma(k)} \quad (36)$$

Prawdopodobieństwo koniunkcji wystąpienia w ciągu sezonu k niezależnych pojedynczych opadów i jednocześnie otrzymania sumarycznej ich wysokości przewyższającej h wyraża się iloczynem

$$p(H > h, k) = P(k) \int_h^\infty g_k(H) dH \quad k > 0 \quad (37)$$

Prawdopodobieństwo przewyższenia przez opad sezonowy wartości h otrzymuje się jako prawdopodobieństwo alternatywy zdarzeń wyłączających się

$$p(H > h) = \sum_{k=1}^{\infty} p(H > h, k) \quad \text{dla } h > 0 \quad (38)$$

$$p(H = 0) = e^{-\lambda} \quad \text{dla } h = 0$$

Podstawiając do (38) równania (1) i (36) otrzymuje się, po zróżniczkowaniu względem h , funkcję gęstości prawdopodobieństwa sezonowej sumy opadów

$$\left. \begin{aligned} \varphi(h) &= e^{-(\lambda+\alpha h)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha\lambda)^k}{k!(k-1)!} h^{k-1}, \quad h > 0 \\ \text{plus impuls} \\ p(H=0) &= e^{-\lambda}, \quad h = 0 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Jej wartość średnia wynosi

$$m(h) = m(k) \cdot m(x) = \frac{\lambda}{\alpha} \quad (40)$$

a wariancja

$$\sigma^2(h) = \frac{2\lambda}{\alpha^2} \quad (41)$$

Powyższy typ rozkładu jest również wykorzystywany dla modelowania ruchu rumowiska rzeczno przy przepływie ustalonym (Gładki, Michalik, 1978).

Zajmiemy się obecnie oceną dokładności oszacowania wartości średniej (40), tj. sezonowego opadu normalnego. Podstawiając do

$$\sigma_{\lambda, N}^2[m(h)] = \frac{1}{\alpha^2} \sigma^2(\lambda) + \frac{\lambda^2}{\alpha^4} \sigma^2(\alpha) \quad (42)$$

wzory (24) i (26), otrzymamy

$$\sigma_{\lambda, N}^2[m(h)] = \frac{1}{\alpha^2 N} (1 + \lambda) \quad (43)$$

Wariancja (43) różnie wraz ze wzrostem częstości j , ale towarzyszy temu wzrost wartości średniej (40) i w rezultacie błąd względny oszacowania

$$\delta = \frac{\sigma_{\lambda, N}[m(h)]}{m(h)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}} \quad (44)$$

wówczas maleje.

Dla dużych częstości λ , a więc zgodnie z (2) dla dłuższych okresów T , rozkład (39) może być aproksymowany rozkładem normalnym. Wykorzystamy tę właściwość dla oceny dokładności oszacowania z próby losowej sezonowych sum opadów. Wariancja oszacowania wartości średniej w rozkładzie normalnym wynosi

$$\sigma_N^2[m(h)] = \frac{\sigma^2(h)}{N} \quad (45)$$

a uwzględniając (41)

$$\sigma_N^2[m(h)] = \frac{2\lambda}{\alpha^2 N} \quad (46)$$

Stosunek (43) i (46) daje ocenę efektywności względnej

$$e = \frac{1 + \lambda}{2\lambda} \quad (47)$$

przy czym $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e = 0,5$.

Choć w obu przypadkach uzyskuje się identyczne oszacowanie sezonowego opadu normalnego, to jednak dokładności oszacowań nieco się różnią. Jest to wynik różnych modeli przyjętych do wyznaczenia tej wartości i powinno stanowić przestrożę przed stosowaniem modelu serii czasowej, gdy prowadzi to do niewielkiego wzrostu teoretycznej dokładności oszacowania.

Jest intuicyjnie wyczuwalne, iż zastosowanie modelu serii czasowej może przy dużych częstościach λ polepszyć oszacowanie odchylenia $\sigma(h)$. Wykorzystując równania (41), (24) i (26), otrzymujemy wariancję odchylenia średniego standardowego

$$\sigma_{\lambda, N}^2[\sigma(h)] = \frac{1}{2\lambda\alpha^2} \sigma^2(\lambda) + \frac{2\lambda}{\alpha^4} \sigma^2(\alpha) = \frac{\sigma^2(h)}{2\lambda N} \left(\frac{1}{2\lambda} + 2 \right) \quad (48)$$

podczas gdy przy metodzie konwencjonalnej jest ona równa

$$\sigma_N^2[\sigma(h)] = \frac{\sigma^2(h)}{2N} \quad (49)$$

stąd efektywność względna jest równa

$$e = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{2\lambda} + 2 \right) \quad (50)$$

Tym samym dowiedliśmy również, że przy dużych wartościach λ wykorzystanie modelu serii czasowej dla oszacowania kwantyli rzędu odbiegającego od 0,50 prowadzi do wzrostu dokładności w stosunku do wyniku uzyskanego z metody konwencjonalnej.

Podsumowanie

Pokazano, jak na podstawie prostego modelu serii czasowej można analitycznie wyznaczyć typy rozkładów prawdopodobieństwa opadów maksymalnych i sezonowych sum opadów. Modelem tym był proces Poissona wystąpień niezależnych opadów oraz rozkład wykładniczy ich wysokości. Parametry rozkładów szacowano bezpośrednio z serii czasowej. Stwierdzono zysk na dokładności oszacowania kwantyli w stosunku do szacowania ich z próby losowej maksymalnych, sezonowych, pojedynczych opadów lub też sum opadów. Uzyskane wyniki zachęcają do estymacji

parametrów bezpośrednio z serii czasowej. Należy jednak być świadomym, że opierają się one na założeniu modelu ilości wystąpień deszczów oraz modelu rozkładu ich wysokości, podczas gdy w metodzie tradycyjnej zakłada się jedynie model rozkładu analizowanej zmiennej losowej. Oczywiście, uzyskany w konkretnym przypadku zysk będzie tym bliższy otrzymanej w pracy wartości, im bardziej wierny rzeczywistości jest przyjęty model serii czasowej. Im większa jest założona wartość progowa wysokości pojedynczych opadów, tym bardziej przekonujące wydaje się założenie modelu Poissona. Przypomnijmy, że rozkład sezonowych sum opadu wyznacza się przy zerowej wartości progowej, podczas gdy rozkład sezonowych maksymalnych opadów pozwala na dowolne przyjęcie tej wartości. Wynika z tego, że z przedstawionych dwóch możliwości większe znaczenie praktyczne ma wykorzystanie modelu do wyznaczania rozkładu maksymalnych opadów sezonowych. Bardziej przekonujące od testowania przyjętych w modelu serii czasowej założeń wydaje się porównanie wyników uzyskanych na podstawie krótkiej serii czasowej z wynikami uzyskanymi z wieloletniej obserwacji maksymalnych sezonowych wysokości bądź sezonowych sum opadu. Przykłady takich porównań, potwierdzające efektywność metody, można znaleźć dla sumy opadów u Eaglesona (1978).

Parametry modelu serii czasowej są zarazem parametrami rozkładu opadów maksymalnych i sum sezonowych. Podstawiając do równania (18) opisującego rozkład prawdopodobieństwa opadów maksymalnych wzory (37) i (38), zastępujemy te parametry średnią sezonową sumą opadów i jej wariancją. Otrzymane w ten sposób uzależnienie opadów maksymalnych od opadu normalnego jest cechą charakterystyczną wzoru Lambora (1953) na maksymalne natężenie opadów.

Idea niniejszej pracy zrodziła się w ramach prac nad *Atlasem hydrologicznym Polski*.

LITERATURA

- Eagleson P. S., 1978, *Climate, soil and vegetation. 2. The distribution of annual precipitation derived from observed storm sequences*. Water Resources Research, t. 14, nr 5.
- Gładki H., Michalik A., 1978, *Modele stochastyczne ruchu rumowiska wlezonego i możliwości ich weryfikacji metodami radioizotopowymi*. Arch. Hydrotech., t. 25, nr 3, s. 335–349.
- Gumbel E. J., 1954, *Statistical theory of extreme values and some practical applications*. National Bureau of Standards. Appl. Mathem., Ser. 33.
- Ison N. T., Feyerherm A. M., Bark L. D., 1971, *Wet period precipitation and the gamma distribution*. J. Appl. Meteorol., t. 10 (4), s. 658–665.
- Kaczmarek Z., 1960, *Przedział ufności jako miara dokładności oszacowania prawdopodobnych przepływów powodziowych*. Wiad. Śl. Hydr.-Met., t. 7, nr 4.
- Kaczmarek Z., 1970, *Metody statystyczne w hydrologii i meteorologii*. Warszawa, s. 125–128.
- Lambor J., 1953, *Maksymalne natężenie deszczów o określonym prawdopodobieństwie pojawienia się na terytorium Polski*. Acta Geophys. Pol., t. 1, nr 3–4.
- Strupczewski W. G., 1967, *Wyznaczanie prawdopodobieństwa występowania powtarzających się zjawisk*. Acta Geophys. Pol., t. 15, nr 2.
- Strupczewski W. G., 1967a, *Wyznaczanie rozkładu prawdopodobieństwa rocznego niektórych zjawisk na podstawie wszystkich wystąpień*. Acta Geophys. Pol., t. 15, nr 3.
- Strupczewski W. G., 1967b, *Determination of the probability distribution of maximum discharge on basis of all observed floods*. Symposium IAHS, Leningrad.

Todorovic P., Yevjevich V., 1969, *Stochastic processes of precipitation*. Colo. State Univ., Hydrol. Pap. 35, s. 1–61.

SUMMARY

Point precipitation time series model is analysed. It is assumed that individual discrete storm events are mutually independent and that the average time between events is large with respect to the average duration of the events themselves. The storm arrivals and storm depths are assumed Poisson and exponentially distributed respectively.

General discrete-continuous probability distribution function for maximum seasonal storm depths ($f(x)$) is derived (Eq. (19)) under the assumption that the storm depths distribution ($g(x)$) is continuous.

The threshold depth (ε) for the set of the analysed storms is introduced. If $g(x)$ is exponential distribution then for $x \geq \varepsilon$ (Eq. (20a)) $f(x)$ follows the Fisher-Tippett distribution law of the 1st type. The parameters of the distribution are the time series parameters (i.e. λ – mean number of storms per season, α – parameter of exponential distribution and ε – threshold value). Using Maximum Likelihood method for estimation of λ , and α parameters, variance of quantile estimation given by Eq. (21) is determined (Eq. (27)). This variance is compared with the variance of a random sample of maximum seasonal storm depth (Eq. (31)). Ratio of these variances (Eq. (33)) measures the relative efficiency of the time series model. This ratio is shown in Fig. 1 for several values of λ .

The density distribution function for total seasonal precipitation is derived from the time series model (Eq. (39)) with $\varepsilon = 0$. The variance of estimate of mean seasonal precipitation is given (Eq. (43)) and compared with variance determined from random sample of seasonal precipitation totals (Eq. (46)). It was taken into account that (Eq. (39)) can be, for large λ , approximated by normal distribution.