



Jarosław J. NAPIÓRKOWSKI

Instytut Geofizyki PAN - Warszawa

NIELINIOWY MODEL SPŁYWU POWIERZCHNIOWEGO

THE NONLINEAR SURFACE RUNOFF MODEL

Przepływ w korycie otwartym modelowany równaniami fizyki matematycznej opisuje dokładnie, w ramach przyjętych założeń upraszczających, dynamikę procesu przepływu. Ze względu na strukturę danych dostępnych w praktyce używa się jednak najczęściej modeli systemowych lub konceptualnych, których parametry określa się na podstawie ciągów obserwacji dopływu i odpływu. Procesy zachodzące w skali zlewni są o wiele bardziej złożone. Eliminuje to w praktyce możliwość wyboru podejścia przy konstruowaniu modelu opad-odpływ. Jedyny racjonalny wybór, sprawdzony w praktyce, to model konceptualny lub systemowy. Model taki ma jednocześnie zalety:

- stosunkowo małe wymagania co do ilości informacji (pomiarów w terenie) i mocy obliczeniowych (czasu, pamięci);
- możliwość stosowania efektywnych algorytmów identyfikacji parametrów;
- strukturę umożliwiającą wykorzystanie modelu w systemach sterowania.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie wyników symulacji spływu powierzchniowego za pomocą 4-parametrowego modelu nieliniowego. Parametry modelu dobierane są w ten sposób, aby różnica pomiędzy wyjściami z modelu a wyjściami z systemu rzeczywistego (odpływem w profilu zamykającym zlewnię) była jak najmniejsza w sensie średniokwadratowym.

[547]

Identyfikacja jest problemem odwrotnym w sensie Tichonowa (Tichonow, Arsienin, 1974), co oznacza, że wynik jest wrażliwy na błędy w danych pomiarowych. Dooqe (1973) zaproponował, aby zadanie identyfikacji przeprowadzać w 3 etapach. Każda metoda identyfikacji i każdy badany model powinny być testowane przy użyciu 3 rodzajów danych, takich jak:

- 1) dane nieobciążone błędami, uzyskane za pomocą modelu;
- 2) dane z punktu 1) obciążone znanymi błędami systematycznymi i losowymi;
- 3) dane rzeczywiste.

Testy 1) i 2) zapewniają prawidłowe postawienie problemu identyfikacji, tzn. że struktura modelu jest identyfikowalna, a algorytm zbieżny. Dopiero model, który przeszedł wszystkie 3 próby, może być polecony do użytku operacyjnego.

W pracy przedstawiono model złożony z kaskady zbiorników nieliniowych. Uwzględnione są jedynie liniowe, kwadratowe i sześciennne zmiany wokół odpływu odniesienia. W związku z tym został on nazwany Modelem Stanu Trzeciego Rzędu (MSTR). W razie potrzeby mogą być uwzględnione również nieliniowości rzędu wyższego niż trzeci.

Model Stanu Trzeciego Rzędu (MSTR)

Spływ powierzchniowy symulowany jest za pomocą kaskady jednokowych zbiorników nieliniowych. Każdy zbiornik nieliniowy odpowiedzialny jest za część transformacji systemu opad-odpływ. Powyższy model skupiony przyjmuje postać układu równań różniczkowych zwyczajnych

$$\begin{aligned} \dot{S}_1(t) &= -f[S_1(t)] + I(t) \\ \dot{S}_2(t) &= -f[S_2(t)] + f[S_1(t)] \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \tag{1a}$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_n(t) &= -f[S_n(t)] + f[S_{n-1}(t)] \\ y(t) &= f[S_n(t)] \end{aligned} \tag{1b}$$

gdzie: n - liczba zbiorników, I - opad efektywny, S_i - retencja i -tego zbiornika (kropka na S_i symbolizuje $\frac{d}{dt}$), f - reprezentuje relację odpływ-napełnianie pojedynczego zbiornika, y - wyjście mo-

delu. Postać funkcji $f[S_1(t)]$ nie jest znana. Zakłada się jedynie jej różniczkowalność dowolną liczbę razy przy $S_1(t) \geq 0$. W pracy dyskutowana jest symulacja spływu powierzchniowego przy założeniu zerowych warunków początkowych $\underline{S}(0) = 0$.

Z trajektorii stanu $\underline{S}(t)$ i trajektorii wyjścia można wydzielić część liniową, kwadratową, sześcienną i składnik reprezentujący błąd rozwinięcia

$$\underline{S}(t) = \delta \underline{S}(t) + \delta^2 \underline{S}(t) + \delta^3 \underline{S}(t) + e(\underline{S}) \quad (2)$$

$$y(t) = \delta y(t) + \delta^2 y(t) + \delta^3 y(t) + e(y) \quad (3)$$

Aby obliczyć poszczególne składowe trajektorii stanu i wyjścia, korzystamy z rozwinięcia Taylora funkcji odpływ-napełnienie:

$$f[S_1(t)] = a S_1(t) + b [S_1(t)]^2 + c [S_1(t)]^3 + e(f) \quad (4)$$

gdzie

$$a = \frac{\partial f}{\partial S_1}, \quad b = \frac{\partial^2 f}{2 \partial S_1^2}, \quad c = \frac{\partial^3 f}{6 \partial S_1^3} \quad (5)$$

Podstawiając równania (2, 3, 4, 5) do równań (1) i pomijając przyrosty rzędu wyższego niż pierwszy, otrzymujemy układ równań opisujący liniową aproksymację kaskady zbiorników

$$\delta \dot{\underline{S}}(t) = a \Phi \underline{S}(t) + [1, 0, \dots, 0]^T I(t) \quad (6a)$$

$$y(t) = a S_n(t) \quad (6b)$$

gdzie

$$\Phi = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Gdy przyrosty drugiego rzędu są wzięte pod uwagę, otrzymujemy dodatkowy układ równań

$$\delta^2 \dot{\underline{S}}(t) = a \Phi \delta^2 \underline{S}(t) + b \Phi [\delta \underline{S}(t)]^2 \quad (8a)$$

$$\delta^2 y(t) = a \delta^2 S_n(t) + b [S_n(t)]^2 \quad (8b)$$

liniowy względem $\delta^2 \underline{s}(t)$ i $\delta^2 y(t)$. Gdy przyrosty trzeciego rzędu są również wzięte pod uwagę, otrzymujemy kolejny układ równań

$$\delta^3 \dot{\underline{s}}(t) = a \Phi \delta^3 \underline{s}(t) + 2b \Phi \delta \underline{s}(t) \delta^2 \underline{s}(t) + c \Phi [\delta \underline{s}(t)]^3 \quad (9a)$$

$$\delta^3 y(t) = a \delta^3 s_n(t) + 2b \delta s_n(t) \delta^2 s_n(t) + c [\delta s_n(t)]^3 \quad (9b)$$

liniowy względem $\delta^3 \underline{s}(t)$ i $\delta^3 y(t)$.

Należy zauważyć, że argument funkcji wymuszającej równania (8) jest rozwiązaniem równania (6) oraz że argumentami funkcji wymuszającej równania (9) są rozwiązania równań (6, 8).

Macierz tranzycyjna równań (6) jest taka sama jak równań (8, 9). Może być ona wyznaczona przez odwrotne przekształcenie Laplace'a

$$\varphi(t) = \exp(a\Phi t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ [pI - a\Phi]^{-1} \right\} \quad (10)$$

Liniowa, kwadratowa i sześcienna aproksymacja kaskady zbiorników nieliniowych (równania 6, 8, 9) tworzą Model Stanu Trzeciego Rzędu (MSTR) wykorzystany w niniejszej pracy do symulacji spływu powierzchniowego.

MSTR jest równoważny pierwszym 3 składnikom rozwinięcia Volterra równania (1)

$$\begin{aligned} y(t) = & \int_0^t h_1(r) I(t-r) dr + \iint_{00}^{tt} h_2(r_1, r_2) I(t-r_1) I(t-r_2) dr_1 dr_2 + \\ & + \iiint_{000}^{ttt} h_3(r_1, r_2, r_3) I(t-r_1) I(t-r_2) I(t-r_3) dr_1 dr_2 dr_3 \end{aligned} \quad (11)$$

którego jądra h_1 , h_2 , h_3 mogą być wyznaczone na drodze analitycznej (Napiórkowski, 1983). Z obliczeniowego punktu widzenia jest jednak bardziej czasochłonne obliczanie całek podwójnych i potrójnych w równaniu (11) w porównaniu z rozwiązaniem 3 liniowych układów równań różniczkowych (6, 8, 9).

Identyfikacja MSTR

Problem identyfikacji MSTR polega na takim wyborze parametrów n, a, b, c , przy którym odchylenie średniokwadratowe między wyjściami modelu a rzeczywistymi odpływami w profilu zamykającym zlewnię osiąga wartość minimalną. Tak więc poszukujemy parametrów minimalizujących wskaźnik jakości

$$J(n, a, b, c) = \sum_{i=1}^M \int_0^{T_i} [O_i(t) - \delta y_i(t) - \delta^2 y_i(t) - \delta^3 y_i(t)]^2 dt \quad (12)$$

gdzie: M - liczba niezależnych par opad efektywny-odpływ, i - numer pary opad-odpływ, T_i - długość zapisu i -tego odpływu, O_i - i -ty odpływ rzeczywisty.

Z obliczeniowego punktu widzenia dogodnie jest podzielić sześcienny składnik $\delta^3 \underline{S}(t)$ oraz $\delta^3 y(t)$ w równaniu (9) na 2 części

$$\delta^3 \underline{S}(t) = \delta^3 \underline{S}'(t) + \delta^3 \underline{S}''(t) \quad (13a)$$

$$\delta^3 y(t) = \delta^3 y'(t) + \delta^3 y''(t) \quad (13b)$$

wykorzystując addytywną postać funkcji wymuszającej. Ponieważ równanie (9) jest liniowym równaniem różniczkowym, dekompozycja ta nie zawiera dodatkowych założeń lub uproszczeń.

$\delta^3 \underline{S}'(t)$ i $\delta^3 y'(t)$ są rozwiązaniami równania (9) przy założeniu $c = 0$, czyli rozwiązaniami układu równań

$$\delta^3 \underline{S}'(t) = a \Phi \delta^3 \underline{S}'(t) + 2b \Phi \delta \underline{S}(t) \delta^2 \underline{S}(t) \quad (14a)$$

$$\delta^3 y'(t) = a \delta^3 S'_n(t) + 2b \delta S_n(t) \delta^2 S_n(t) \quad (14b)$$

natomiast $\delta^3 \underline{S}''(t)$ i $\delta^3 y''(t)$ są rozwiązaniami równania (9) przy założeniu $b = 0$, czyli rozwiązaniami układu równań

$$\delta^3 \underline{S}''(t) = a \Phi \delta^3 \underline{S}''(t) + c \Phi [\delta \underline{S}(t)]^3 \quad (15a)$$

$$\delta^3 y''(t) = a \delta^3 S''_n(t) + c [\delta S_n(t)]^3 \quad (15b)$$

Oznaczmy przez $y^2(t)$ i $y^3(t)$ rozwiązania równań (8) i (14) przy założeniu $b = 1$, a przez $y^4(t)$ - rozwiązanie równania (15) przy

założeniu $c = 1$. Dzięki liniowości równań (8, 14, 15) spełnione są relacje

$$\delta y(t) = y^1(t) \quad (16a)$$

$$\delta^2 y(t) = b \cdot y^2(t) \quad (16b)$$

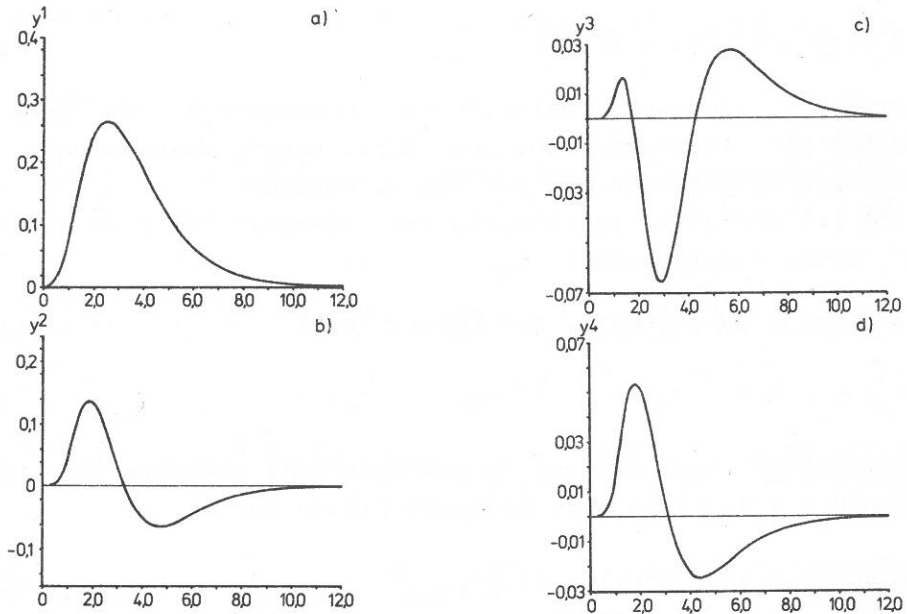
$$\delta^3 y(t) = b^2 \cdot y^3(t) \quad (16c)$$

$$\delta^3 y''(t) = c \cdot y^4(t) \quad (16d)$$

a funkcja celu przyjmuje postać

$$J(n, a, b, c) = \sum_{i=1}^M \int_0^T [0_i(t) - y_i^1(t) - b y_i^2(t) - b^2 y_i^3(t) - c y_i^4(t)]^2 dt \quad (17)$$

Należy zwrócić uwagę na fakt, że po prawej stronie znaku równości w powyższym równaniu wszystkie funkcje czasu zależą od parametrów



Rys. 1. Trajektorie funkcji $y^1(t)$, $y^2(t)$, $y^3(t)$ i $y^4(t)$ kaskady 3 zbiorników nieliniowych przy założeniu wejścia w postaci wygaszonego skoku jednostkowego

Fig. 1. The trajectories $y^1(t)$, $y^2(t)$, $y^3(t)$ and $y^4(t)$ for the case of 3 nonlinear reservoirs and a reduced travel as function input

n i a , nie zależą natomiast od parametrów b i c . W związku z tym problem identyfikacji MSTR może być zredukowany do rozwiązania zadania optymalizacji względem 2 zmiennych, przyjmującego wartości całkowite parametru n oraz wartości dodatnie parametru a . Pozostałe 2 parametry b i c wyznaczone są z warunku koniecznego dla minimum funkcji celu $\partial J/\partial b = 0$ oraz $\partial J/\partial c = 0$.

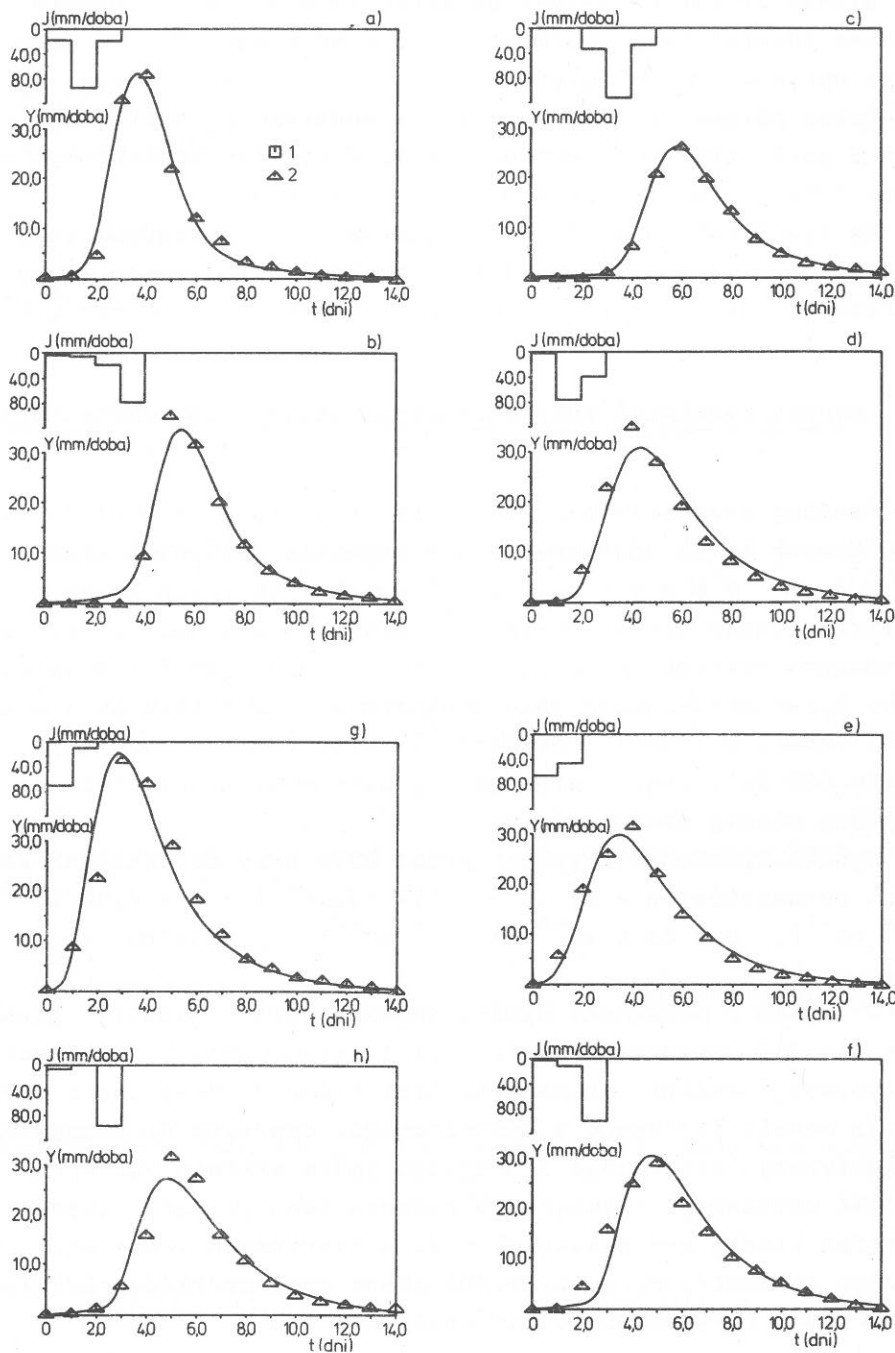
Na rysunkach od 1a do 1d przedstawiono przykładowe trajektorie funkcji y^1, y^2, y^3, y^4 wejścia w postaci wygaszonego skoku jednostkowego, przy założeniu $n = 3$ i bezwymiarowego czasu $t' = at$.

Wyniki symulacji spływu powierzchniowego za pomocą MSTR

Poniżej przedstawiono wyniki identyfikacji parametrów modelu MSTR danych łatwo dostępnych, a mianowicie opisanych przez Diskin i Boneh (1973) i wykorzystanych przez nich przy analizie modelu spływu powierzchniowego, w postaci 2 pierwszych składników szeregu Volterry. Diskin i Boneh (1973) wykorzystali zbiór 8 par opad-odpływ obserwowanych w latach 1935-1951 w zlewni rzeki Cache, w stanie Southern Illinois (USA). Zlewnia ta, o obszarze 630 km^2 , charakteryzuje się łagodnymi zboczami i dobrze rozbudowaną siecią nawadniającą.

Wyniki symulacji uzyskane przez MSTR przy optymalnych wartościach parametrów: $n = 3$; $a = 0,677 \text{ (doba}^{-1}\text{)}$; $b = 5,58 \cdot 10^{-3} \text{ (doba}^{-1} \text{ mm}^{-1}\text{)}$; $c = 83,6 \cdot 10^{-6} \text{ (doba}^{-1} \text{ mm}^{-2}\text{)}$, przedstawiono na rys. od 2a do 2h.

W tabeli 1 porównano wyniki uzyskane dla modeli: liniowego ($b = c = 0$), kwadratowego ($c = 0$) i sześciennego, opartych na aproksymacji kaskady zbiorników nieliniowych, z wynikami uzyskanymi dla modeli liniowego i kwadratowego, opartych na bezpośredniej dyskretyzacji pierwszego i drugiego jądra szeregu Volterry. Stabilność uzyskanego rozwiązania zadania identyfikacji zbadano, ograniczając liczbę par opad-odpływ do 3 pierwszych i ponownie identyfikując parametry n, a, b, c . Uzyskane nowe wartości różniły się od wartości optymalnych 8 par mniej niż 1%.



Rys. 2. Porównanie odpływów obserwowanych (2) i symulowanych za pomocą Modelu Stanu Trzeciego Rzędu (1)

Fig. 2. Comparison of observed runoff (2) and that predicted by the Third Order State Model (1)

T a b e l a 1. Porównanie wyników symulacji uzyskanych za pomocą MSTR z wynikami uzyskanymi przez Diskina i Boneha

T a b l e 1. Comparison of results of simulation obtained for MSTR^a and that obtained by Diskin and Boneh

Wyszczególnienie Specification	Modele oparte na aproksymacji kaskady zbiorników Models based on approximation of reservoirs cascade			Modele Diskina i Boneha Diskin and Boneh models	
	liniowy linear	kwadratowy quadratic	sześcienny cubic	liniowy linear	kwadratowy quadratic
Liczba parametrów Number of parameters	2	3	4	14	74
Funkcja celu Purpose function	445	233	154	354	53

^a MSTR - Third Order State Model.

L i t e r a t u r a

- D i s k i n M. H., B o n e h A., 1973, Determination of optimal kernels for second order stationary surface runoff systems. Water Resour. Res., t. 9, nr 2, s. 311-325.
- D o o g e J. C. I., 1973, Linear theory of hydrologic systems. U. S. Dept. Agricult. Techn. Bulletin, nr 1468.
- N a p i ó r k o w s k i J. J., 1983, The optimization of a third-order surface runoff model. [W:] IAHS Sympozjum HS-4, Scientific Procedure Applied to the Planning, Design and Management of Water Resources Systems, Hamburg.
- T i c h o n o w A. N., A r s i e n i n W. J., 1974, Metody i rzeszenia niekorrektnych zadacz. Izd. Nauka, Moskwa.

S u m m a r y

The object of the paper is to fit a non-linear four-parameter conceptual model to distributed non-linear surface runoff system. This fitting is carried out for several records of storms. The corresponding direct surface runoff is compared with the output from the conceptual model. The chosen conceptual model is the cubic approximation of the cascade of non-linear reservoirs. Such model is equivalent to the three first terms of the Volterra series.