MONOGRAFIE KOMITETU GOSPODARKI WODNEJ PAN
z. 41 2018

Jarosław NAPIÓRKOWSKI, Adam PIOTROWSKI

Instytut Geofizyki Polskiej Akademii Nauk
Zakład Hydrologii i Hydrodynamiki

HYDRODYNAMICZNE METODY WYPROWADZENIA PARAMETRÓW MODELU MUSKINGUM

METHODS OF HYDRODYNAMIC DERIVATION OF PARAMETERS OF THE MUSKINGUM MODEL

Abstract

To describe the unsteady flow in rivers by means of the methods of mathematical physics, it is necessary to know with sufficient accuracy the geometrical and hydraulic characteristics of the channel reach as well as the initial and boundary conditions. The difficulties of meeting these requirements led to the development in hydrology of lumped conceptual models, in particularly Muskingum model.

There exists a direct possibility of deriving the Muskingum equations from St. Venant equations. One approach presented in the paper is the lumping of the hydrodynamic model under the assumption of linear changes of water level along the river reach and then linearizing it around the steady state. The second approach uses the method of inverse order. First, a state trajectory variation method is applied to the complete St. Venant equations and then the resulting equations are lumped. In both approaches the resulting equations are equivalent to the linear form of the Muskingum model. Hence the relationships between the hydraulic parameters of the St. Venant equation and the lumped parameters of the Muskingum model are derived.

Key words: St. Venant equations, the Muskingum model, flood wave

1. WSTĘP

Opis nieustalonego ruchu wody w rzekach za pomocą metod fizyki matematycznej wymaga znajomości z dostateczną dokładnością geometrycznych i hydraulicznych charakterystyk odcinka rzeki, a także warunków początkowych i brzegowych. Trudności w spełnieniu tych wymagań i chęć znalezienia prostych, a jednocześnie wystarczająco dokładnych metod doprowadziły do rozwoju w hydrologii skupionych modeli koncepcyjnych.

Jednym z najstarszych, a jednocześnie najbardziej popularnych modeli hydrologicznych jest model Muskingum, zaproponowany w 1938 roku przez McCarthy'ego z Korpusu Inżynierów Armii USA. Jego główną zaletą jest to że: (i) może być stosowany do zlewni słabo oprzyrządowanych i o nieznanych geometriach koryta, (ii) wymaga krótkiego czasu obliczeń i (iii) w przypadku modelu o zmiennych parametrach odpowiednio odzwierciedla takie cechy fali dynamicznej, jak np. krzywa przepływu z histerezą. Nieliniowe i niestacjonarne modyfikacje modelu Muskingum, wykorzystywane do opisu transformacji fal wezbraniowych, są w dalszym ciągu rozwijane i doskonalone (Song i in. 2011; Barbetta i in. 2017; Kang i in. 2017; Perumal i in. 2017).

W artykule dotyczącym liniowego modelu Muskingum, który powstał w oparciu o wyniki wieloletniej współpracy pierwszego autora z jego mentorami, z prof. Jamesem Dooge'iem z University College Dubli oraz prof. Witoldem Strupczewskim z Instytutu Geofizyki PAN, (Dooge i in. 1982; Napiórkowski i in. 1981, Strupczewski i Napiórkowski 1986, 1989, 1990, Strupczewski i in. 1989) omówione zostaną dwie hydrodynamiczne metody wyznaczania parametrów modelu Muskingum.

2. RÓWNANIA ST. VENANTA OPISUJACE PRZEPŁYW NIEUSTALONY W KANAŁACH OTWARTYCH

Ruch fal wezbraniowych w rzekach jest badany na podstawie analizy jednowymiarowej, tzn. zmiennymi niezależnymi są upływający czas t w s oraz jednowymiarowa zmienna przestrzenna x w m w kierunku przepływu. Najważniejszym problemem związanym z transformacją wezbrań jest predykcja charakterystyk przepływu w dolnym odcinku cieku na podstawie znajomości charakterystyk przepływu w górnym odcinku oraz charakterystyki hydraulicznej kanału między dwoma odcinkami.

2.1. Podstawowe równania transformacji wezbrań

Jednowymiarowy nieustalony przepływ w rzece może być opisany za pomocą układu równań St. Venanta, tworzonego przez równanie ciągłości i równanie dynamiki. Równanie ciągłości w korytach otwartych bez dopływy bocznego jest dane przez:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

gdzie:
$Q(x,t)$ – przepływ [$m^3 \cdot s^{-1}$],
$A(x,t)$ – przekrój poprzeczny przepływu [m^2].

Jeżeli przyjęte zostanie założenie, że tylko przyspieszenie w kierunku ruchu musi być wzięte pod uwagę, wtedy równanie dynamiczne można zapisać jako (Dooge i in. 1982)

$$g(1-F^2)\frac{A}{B}\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{2Q}{A}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} = gA(S_o - S_f) \tag{2}$$

gdzie:
B – szerokość kanału na poziomie zwierciadła wody [m].

$$B = \frac{dA}{dy} \tag{3}$$

g – przyspieszenie ziemskie [$m^2 \cdot s^{-1}$],
S_o – nachyleniem dna [-],
y – głębokość [m],
F – liczba Frouda definiowaną jako:

$$F^2 = \frac{Q^2 B}{g A^3} \tag{4}$$

Nachylenie tarcia S_f (spadek linii energii) zależy od założonego prawa tarcia, kształtu i szorstkości przekroju poprzecznego, oraz wielkości przepływu w przekroju poprzecznym

$$S_f = f(Q, A, \text{kształt, szorstkość}) \tag{5a}$$

Dla danego kształtu i szorstkości przekroju poprzecznego oraz dla każdego prawa tarcia - Chezy'ego, Manninga lub logarytmicznego - nachylenie tarcia może być wyrażone jako funkcja przepływu Q i powierzchni przekroju poprzecznego A. Dla formuły Chezy'ego mamy ogólnie:

$$S_f = \frac{Q^2}{C^2 A^2 R(A)} \tag{5b}$$

W równaniu (5b) promień hydrauliczny $R(x,t)$ jest wyrażony jako funkcja zależna od $A(x,t)$.

Dla szczególnego przypadku szerokiego kanału prostokątnego, dla formuły Chezy'ego, nachylenie tarcia jest dane przez:

$$S_f = \frac{BQ^2}{C^2 A^3} \tag{5c}$$

gdzie:
B – stała szerokością,
C – parametr szorstkości Chezy'ego.

Dla formuły Manninga z parametrem szorstkości n i szerokiego kanału prostokątnego nachylenie tarcia określone jest wzorem:

$$S_f = n^2 \frac{B^{4/3} Q^2}{A^{10/3}} \tag{5d}$$

2.2. Linearyzacja równań Saint Venanta

Pełne nieliniowe równania St. Venanta mogą być uproszczone przez rozważenie odchyleń pierwszego rzędu od trajektorii dla stanu ustalonego (Dooge i in. 1987a, 1987b). Równania zlinearyzowane wyprowadza się w dwóch etapach:

a) rozwinięcie nieliniowych członów w równaniu (2) w szereg Taylora wokół stanu ustalonego Q_o, A_o i ograniczenie rozwinięcia do przyrostów pierwszego rzędu $Q'(x,t)$, $A'(x,t)$ określonych jako:

$$Q(x,t) - Q_o = Q'(x,t) + \varepsilon(Q) \tag{6}$$

$$A(x,t) - A_o = A'(x,t) + \varepsilon(A) \tag{7}$$

gdzie:
$\varepsilon(Q)$ i $\varepsilon(A)$ reprezentują człony wyższego rzędu niż liniowe (błąd aproksymacji),

b) podstawienie równań (6) i (7) do równań (1) i (2) z pominieciem przyrostów wyższego rzędu.

Otrzymane równania przyjmują postać:

$$\frac{\partial Q'}{\partial x} + \frac{\partial A'}{\partial t} = 0 \tag{8}$$

$$g(1 - F_0^2)\frac{A_o}{B_o}\frac{\partial A'}{\partial x} + \frac{2Q_o}{A_o}\frac{\partial Q'}{\partial x} + \frac{\partial Q'}{\partial t} = gA'(-\frac{\partial S_f}{\partial Q}Q' - \frac{\partial S_f}{\partial A}A') \tag{9}$$

gdzie pochodne nachylenia tarcia $S_f(x,t)$ względem przepływu Q oraz powierzchni A po prawej stronie równania są obliczone dla warunków odniesienia. Lewa strona równania (9) ma taką sama postać jak równanie (2), z którego jest wyprowadzone, za wyjątkiem tego, że współczynniki są ustalone na ich wartościach odniesienia.

Ponieważ w przypadku równomiernego przepływu ustalonego różniczka zupełna nachylenia tarcia musi być zerowa:

$$\frac{dS_f}{dA} = 0 \tag{10}$$

można zapisać:

$$\frac{\partial S_f}{\partial A} + \frac{\partial S_f}{\partial Q}\frac{dQ}{dA} = 0 \tag{11}$$

lub

$$c_k = -(\frac{\partial S_f}{\partial A} / \frac{\partial S_f}{\partial Q}) = \frac{dQ}{dA} \tag{12}$$

gdzie:
c_k – prędkość fali kinematycznej (Lighthill i Whitham, 1955).

W dalszych rozważaniach zdefiniowano m jako stosunek prędkości fali kinematycznej do średniej prędkości w warunkach odniesienia:

$$m = \frac{c_k}{Q_o / A_o} \tag{13}$$

Zmiana nachylenia tarcia z odpływem dla warunków odniesienia, dla wszystkich formuł tarcia przy przepływie turbulentnym może być zapisana jako:

$$\frac{\partial S_f}{\partial Q} = 2\frac{S_o}{Q_o} \tag{14a}$$

$$\frac{\partial S_f}{\partial A} = -2c_k\frac{S_o}{Q_o} \tag{14b}$$

3. HYDROLOGICZNE METODY TRANSFORMACJI WEZBRAŃ

Pełne równanie dynamiczne opisane za pomocą równania (2) reprezentuje model rozłożony, w którym zmienne zależne są ciągłymi funkcjami odległości wzdłuż kanału. W wielu praktycznych problemach dane są dostępne tylko w niektórych wybranych przekrojach, wtedy używane są modele „czarnej skrzynki" lub modele konceptualne, które mogą być kalibrowane w oparciu o przepływy w górnym i dolnym przekroju odcinka rzeki o znanej długości .

W takim podejściu rozłożone równanie ciągłości opisane za pomocą równania (1) jest zastąpione przez skupione równanie ciągłości. Można to łatwo uzyskać poprzez całkowanie równania (1) wzdłuż odcinka rzeki:

$$\int_1^2 \frac{\partial A}{\partial t}dx = -\int_1^2 \frac{\partial Q}{\partial x}dx \tag{15a}$$

Gdzie dolna granica całkowania oznacza górny koniec odcinka, a górna granica koniec dolny. Równanie (15a) można zapisać jako zależność:

$$\frac{d}{dt}\int_1^2 A(x,t)dx = -[Q(x,t)]_1^2 \tag{15b}$$

lub równoważnie:

$$\frac{dV}{dt} = Q_1(t) - Q_2(t) \tag{15c}$$

gdzie:
$V(t)$ – retencja odcinka rzeki,
$Q_1(t)$ – dopływ do górnego końca odcinka rzeki,
$Q_2(t)$ – odpływ z dolnego końca odcinka rzeki.

Znalezienie równania różniczkowego zwyczajnego jako odpowiednika rozłożonego równania dynamicznego nie jest takie proste. W klasycznym podejściu hydrologicznym do transformacji wezbrań równanie dynamiczne jest pomijane i zastąpione postulowaną zależnością między trzema zmiennymi V, Q_1 i Q_2):

$$V(t) = f(Q_1(t), Q_2(t)] \tag{16}$$

Należy zdawać sobie sprawę, że operator po prawej stronie równania (16) może mieć charakter różniczkowy lub algebraiczny. Zależność typu (16) jest wystarczająca do rozwiązania problemu transformacji wezbrania, w którym szukane jest odpływ $Q_2(t)$ jako funkcja stanu $V(t)$ i dopływu $Q_1(t)$.

Większość metod hydrologicznych transformacji wezbrań ma charakter liniowy i odpowiadają liniowemu operatorowi w równaniu (16). Najprostsza zależność liniowa między retencją V i odpływem $Q_2(t)$ jest określona za pomocą równania:

$$V(t) = K\, Q_2(t) \tag{17}$$

które reprezentuje podstawowy model konceptualny zbiornika liniowego ze stałą zbiornika K. Taki prosty model okazuje się nieadekwatny do opisu ruchu fal powodziowych w rzekach, a następnym krokiem jest rozważenie zastąpienia tej jednoparametrowej zależności przez zależność dwuparametryczną. Jeżeli przyjmiemy, że retencja V jest liniową funkcją dopływu Q_1 oraz odpływu Q_2, wówczas uzyskujemy podstawową zależność modelu Muskingum:

$$V(t) = K\,[\alpha Q_1(t) + (1-\alpha)Q_2(t)] \tag{18}$$

który został po raz pierwszy zaproponowany przez McCarthy'ego (1939). Gdy dostępne są dane dotyczące dopływu i odpływu, mogą one być użyte do kalibracji wartości parametrów K i. Następnie model Muskingum z tymi parametrami może być użyty do predykcji odpływu dla dowolnego dopływu. Zauważmy, że współczynnik wagowy oznaczony jest w tej pracy jako α, zamiast powszechnie stosowanego x, ponieważ x reprezentuje jednowymiarową zmienną przestrzenną.

4. ZALEŻNOŚĆI MIĘDZY PRZYROSTAMI PIERWSZEGO RZĘDU W ZLINEARYZOWANYM RÓWNANIU ST. VENANTA

Aby zredukować równanie (9) z postaci prognostycznej do postaci diagnostycznej należy albo pominąć człon zawierający pochodną po czasie, albo wyrazić ten człon za pomocą wyrażeń zawierających pochodne względem zmiennej przestrzennej. Korzystne w tym przypadku będzie zastosowanie aproksymacji z wykorzystaniem fali kinematycznej (Dooge i in. 1982). Równanie fali kinematycznej uzyskuje się przez pominięcie wszystkich składników po lewej stronie równania (9), czyli biorąc pod uwagę równanie (12):

$$Q' = c_k A' \tag{19}$$

Równanie (19) może być użyte do aproksymacji ostatniego członu po prawej stronie równania (9):

$$\frac{\partial Q'}{\partial t} = c_k \frac{\partial A'}{\partial t} \tag{20}$$

które w połączeniu z równaniem ciągłości (8) prowadzi do wyrażenia pochodnej Q' względem czasu za pomocą pochodnej Q' względem długości:

$$\frac{\partial Q'}{\partial t} = -c_k \frac{\partial Q'}{\partial x} \tag{21}$$

Podstawiając równanie (21) do równania (9), oraz grupując człony uzyskano (Napiórkowski 1992):

$$g(1-F_o^2)\frac{A_o}{B_o}\frac{\partial A'}{\partial x}+\left(\frac{2Q_o}{A_o}-c_k\right)\frac{\partial Q'}{\partial x}=gA'(-\frac{\partial S_f}{\partial Q}Q'-\frac{\partial S_f}{\partial A}A') \tag{22}$$

która to relacja zawiera tylko zależności miedzy zmiennymi dla danej chwili czasu.

Zależność (22) między przyrostami pierwszego rzędu przepływu i powierzchnią przekroju poprzecznego zostanie zredukowana do postaci skupionej. Umożliwi to porównanie z równaniem modelu Muskingum (18), poprzez zapisanie jej za pomocą wartości tych zmiennych na obu końcach odcinka rzeki, zgodnie z koncepcją przedstawioną w pracy Dooge i inni (1982). Jeżeli posiadamy informację tylko o przepływach i stanach na górnym i dolnym przekroju poprzecznym, zmuszeni jesteśmy aproksymować pochodne przyrostów przepływu i powierzchni przekroju poprzecznego jako:

$$\frac{\partial A'}{\partial x}=\frac{A_2'-A_1'}{L} \tag{23a}$$

$$\frac{\partial Q'}{\partial x}=\frac{Q_2'-Q_1'}{L} \tag{23b}$$

gdzie:
A_1 i A_2 – przyrosty pola przekroju poprzecznego na górnym i dolnym odcinku rzeki [m^2],
Q_1 i Q_2 – przyrosty przepływu [m^3·s^{-1}],
L – długością odcinka [m].

Oszacowania pochodnych za pomocą równań (23) jest słuszne jedynie wtedy, gdy długość fali wezbraniowej jest większa w porównaniu z długością analizowanego odcinka rzeki. Dla dokładnej symulacji fal krótszych powinien być stosowany model oparty na wielu odcinkach.

Obecnie można określić równanie (22) na każdym końcu odcinka rzeki. W przypadku górnego końca odcinka rzeki, po lewej stronie równania wykorzystuje się aproksymacje (23), a do prawej strony równania wstawiane są wartości Q_1 oraz A_1. W przypadku dolnego końca odcinka wstawiane są odpowiednio Q_2 oraz A_2. Po podstawieniu i zgrupowaniu wyrazów związanych z powierzchnią po jednej stronie i przepływami po drugiej uzyskuje się dwie następujące zależności:

$$(M-N)A_1'-MA_2'=(P-R)Q_1'+RQ_2' \tag{24a}$$

$$MA_1'-(M+N)A_2'=-RQ_1'+(P+R)Q_2' \tag{24b}$$

gdzie:

$$M=(1-F_o^2)\frac{gA_o}{B_oL},\quad N=-2gA_oc_k\frac{S_o}{Q_o} \qquad \text{(25a, 25b)}$$

$$P=2gA_o\frac{S_o}{Q_o},\quad R=\frac{2Q_o}{A_oL}-\frac{c_k}{L} \qquad \text{(25c, 25d)}$$

Na podstawie równań (24) liniowe przyrosty przekrojów poprzecznych przepływu na górnym i dolnym końcu analizowanego odcinka mogą być wyrażone za pomocą przyrostów przepływu na dolnym i górnym końcu odcinka rzeki:

$$A_1' = -\frac{1}{N^2}[M\ R + (M+N)(P-R)]Q_1' + \frac{1}{N^2}[M(P+R)-(M+N)]Q_2' \qquad (26)$$

$$A_2' = -\frac{1}{N^2}[(M-N)R + M(P-R)]Q_1' + \frac{1}{N^2}[(M-N)(P+R)-M\ R)]Q_2' \qquad (27)$$

Równania (26) i (27) mogą być użyte jako podstawa do porównania z podstawową zależnością modelu Muskingum (18).

5. ESTYMACJA PARAMETRÓW MODELU MUSKINGUM NA PODSTAWIE ZLINEARYZOWANYCH RÓWNAŃ ST. VENANATA

Podstawowe założenie metody Muskingum jest określone za pomocą równania (18), w którym K i α są parametrami, które muszą być określone w jakiś sposób. Jeżeli parametry te będą określane w oparciu o równania (26) i (27), wyprowadzone powyżej, wtedy wartości te będą mogły być stosowane w otoczeniu warunków odniesienia wokół których brane są przyrosty zmiennych zależnych. Gdy model Muskingum jest używany jako model liniowy, wtedy te same wartości parametrów będą stosowane dla całego zakresu przepływów. W przypadku stosowania modelu Muskingum w wersji nieliniowej, w które parametry K i α zmieniają się z przepływem, ich wartości mogą w dalszym ciągu być estymowane na podstawie równań (26) i (27) dla dowolnej liczby przepływów odniesienia i zmian parametrów związanych ze zmianą przepływu odniesienia.

Dla modelu Muskingum przyrost napełnienia w odcinku rzeki określony jest jako:

$$V'(t) = K\,[\alpha Q_1'(t) + (1-\alpha)Q_2'(t)] \qquad (28)$$

Jeżeli długość odcinka jest mała w porównaniu z długością fali przepływu nieustalonego (jak to zakładano w równaniach (23)), wtedy napełnienie w odcinku może być w każdej chwili czasu przybliżone za pomocą równania

$$V'(t) = 0.5\,L\,(A_1'(t) + A_2'(t)] \qquad (29)$$

Zależność (29) między przyrostami pierwszego rządu napełnienia i przyrostami pierwszego rzędu powierzchni przekrojów poprzecznych na każdym końcu odcinka, może być przekształcona do zależności między przyrostami napełnienia i przyrostami przepływów na każdym końcu odcinka za pomocą podstawienia równań (26) i (27) do równania (29):

$$V' = \frac{0.5L}{N^2}[-(2M+N)P + 2NR]Q_1' + \frac{0.5L}{N^2}[(2M-N)P - 2NR]Q_2' \qquad (30)$$

Porównanie współczynników przy odpowiadających wyrażeniach w równaniach (28) i (30) umożliwia powiązanie parametrów modelu Muskingum z parametrami równań St. Venanta:

$$K\alpha' = \frac{0.5L}{N^2}[-(2M+N)P+2NR] \tag{31}$$

$$K(1-\alpha) = \frac{0.5L}{N^2}[[(2M-N)P-2NR] \tag{32}$$

Dodając stronami równania (31) i (32) uzyskuje się wyrażenie na parametr K w postaci:

$$K = \frac{0.5L}{N^2}(-2NP) = -\frac{P}{N}L \tag{33}$$

Na podstawie równań (25) otrzymuje się zależność na współczynnik retencji modelu Muskingum:

$$K = \frac{L}{c_k} \tag{34}$$

Parametr skalujący (K) modelu Muskingum odpowiada czasowi przemierzania odcinka rzeki przez falę kinematyczną. Ponieważ fale długie (dla których ten model jest odpowiedni) przemieszczają się w przybliżeniu z prędkością fali kinematycznej, parametr skali (K) jest identyfikowany z czasem przemieszczania się fal długich w rozważanym odcinku rzeki.

Dzieląc stronami równania (31) i (34) można określić drugi parametr modelu Muskingum:

$$\alpha = \frac{0.5}{NP}[(2M+N)P-2NR] = 0.5 + M/N - R/P \tag{35}$$

Podstawiając odpowiednie równania (25a) do (25d) na M, N, P i R, uzyskuje się wyrażenie na drugi parametr modelu:

$$\alpha = 0.5 - [1-(m-1)^2 F_o^2]\frac{Q_o}{2S_oB_oLc_k} \tag{36}$$

które jest oszacowaniem parametru kształtu α na podstawie parametrów hydraulicznych kanału w warunkach odniesienia. Należy zauważyć, że nachylenie tarcia zmienia się odwrotnie proporcjonalnie z powierzchnią przekroju przepływu, tak więc wartość α będzie mniejsza od 0,5 nawet dla wartości liczby Frouda równej 1,0, jeżeli wartość parametru m określonego przez równanie (13) jest mniejsza od 2,0.

Wyniki są zgodne z wynikami uzyskanymi przez Dooge'a (1973) oraz Strupczewskiego i Kundzewicza (1980) za pomocą techniki dopasowywania momentów pomiędzy kompletnym rozwiązaniem liniowym równania St. Venanta a modelem Muskingum.

W przypadku kanału prostokątnego i prawa tarcia Chezy'ego parametry skali i kształtu modelu Muskingum będą dane przez:

$$K = \frac{2}{3}\frac{L}{u_o} \tag{37a}$$

$$\alpha = 0.5 - \frac{1}{3}[1 - 0.25F_o^2]\frac{y_o}{S_o L} \tag{37b}$$

gdzie:
$u_o = Q_o/A_o$ – średnia prędkość w przekroju rzeki [$m \cdot s^{-1}$],
$y_o = A_o/B_o$ – głębokość [m].

Dla przypadku kanału prostokątnego i prawa tarcia Manninga parametry skali i kształtu modelu Muskingum będą następujące:

$$K = \frac{3}{5}\frac{L}{u_o} \tag{38a}$$

$$\alpha = 0.5 - 0.3[1 - \frac{4}{9}F_o^2]\frac{y_o}{S_o L} \tag{38b}$$

Dla kształtów kanału innych niż szeroki prostokątny, parametry będą przyjmowały różne wartości. Na przykład dla koryta o przekroju trójkątnym i prawie tarcia Manninga parametry modelu są następujące:

$$K = \frac{3}{4}\frac{L}{u_o} \tag{39a}$$

$$\alpha = 0.5 - \frac{3}{16}[1 - \frac{1}{9}F_o^2]\frac{y_o}{S_o L} \tag{39b}$$

Z równania (36) wynika, że gdy bezwymiarowa długość kanału:

$$L' = \frac{S_o L}{y_o} \tag{40}$$

będzie się zwiększać, wartość parametru kształtu α będzie się asymptotycznie zbliżać do wartości α = 0,5. Nigdy nie przekroczy tej wartości dla przepływu burzliwego przy liczbach Froude'a mniejszych niż jeden, z wyjątkiem wyjątkowego przypadku, gdy przepływ przy rośnie wolniej niż pole powierzchni przepływu. Te ostatnie warunki utrzymywałyby swobodny przepływ powierzchni w okrągłej rurce, która była prawie pełna, co jest zasadniczo niestabilne, nie występowałoby w kształtach normalnie napotykanych w obliczeniach przepływu w otwartym kanale.

Dla przepływu laminarnego mielibyśmy m = 3.0, a zatem wyrażenie w nawiasach w równaniu (36) może być ujemna dla liczb Froude zbliżających się do jedności. Dałoby to wartość X większą niż 0,5, co wskazywałoby na wzmocnienie we wszystkich częstotliwościach.

Dla bardzo małych długości kanału wartość parametru α podana przez równanie (36) może być ujemna. O ile taka wartość ujemna jest trudna do pogodzenia z koncepcją modelu Muskingum, że całkowita retencja w odcinku rzeki jest sumą ważoną retencji pryzmatycznych, jest to właściwa wartość parametru dla najlepszego dopasowania do linearyzowanego równania.

5. WYPROWADZENIE NIELINIOWEGO SKUPIONEGO MODELU STANU (SNMS)

W poprzednich rozdziałach parametry modelu Muskingum zostały wyznaczone w ten sposób, że najpierw zlinearyzowano rozłożone równania St. Venanta, a następnie na drodze odpowiedniego całkowania tych równań po długości odcinka rzeki uzyskano model skupiony. Porównując uzyskany model skupiony z modelem Muskingum wyprowadzono równania na współczynniki kształtu i retencji. W tym rozdziale zaproponowana będzie odwrotna kolejność, najpierw z nieliniowego modelu rozłożonego wyprowadzony będzie nieliniowy model skupiony, który zostanie następnie zlinearyzowany (Napiorkowski i in. 1981).

Przekształcanie układu równań St. Venanta (1) i (2) rozpoczyna się od pominięcia w równaniu (2) członów inercyjnych, co jest akceptowalne dla małych liczb Frouda. Otrzymane równanie dyfuzji konwekcyjnej można zapisać jako:

$$e\frac{\partial A}{\partial x} = S_o(1-b) \tag{41}$$

Stałe nachylenie tarcia wynosi:

$$b = S_f / S_o \tag{42}$$

gdzie:
e – pominięte człony przyspieszenia lokalnego i przyspieszenia konwekcyjnego.

Całkowanie wzdłuż pryzmatycznego odcinka rzeki równania (1) prowadzi do równania:

$$\frac{dV}{dt} = Q_1(t) - Q_2(t) \tag{15c}$$

Podobne całkowanie równania (41), przy założeniu stałej wartości parametrów e oraz b wzdłuż odcinka rzeki, w każdej chwili prowadzi do skupionej postaci równania:

$$A_2(t) - A_1(t) = S_o L(1-b)/e \tag{43}$$

Ponieważ zgodnie równaniem (5a) nachylenie tarcia zależy od przepływu, pola przekroju poprzecznego i szorstkości koryta $S_f = f(A, Q, \text{szorstkość})$, to dla kanału pryzmatycznego można zapisać:

$$\psi(Q_2, b) - \psi(Q_1, b) = S_o L(1-b)/e \tag{44}$$

Na podstawie równania (41) można zauważyć, że konsekwencją stałej wartości b w każdej chwili czasu wzdłuż odcinka rzeki jest również stałe nachylenie poziomu wody. Umożliwia to wyrażenie napełnienia w tym odcinku za pomocą przekrojów poprzecznych jako:

$$V = \theta(A_1, A_2) \tag{45}$$

lub korzystając z równania (5a) jako:

$$V = \theta(Q_1, Q_2, b) \tag{46}$$

Podobnie jak w poprzednich rozdziałach przyjmuje się, że liniowa aproksymacja poziomu wody powinna być wystarczająco dobra dla fal wezbraniowych dłuższych od modelowanego odcinka rzeki. Oczywiście przybliżenie to nie będzie słuszne dla sygnałów wejściowych typu delta Diraca lub funkcji skoku jednostkowego.

Równania (15c), (44) i (46) tworzą oparty na fizyce skupiony nieliniowy model stanu (SNMS) przepływu w korytach otwartych.

5.1. NSMS dla kanału prostokątnego

Dla szerokiego kanału pryzmatycznego nachylenie tarcia (5c) i (5d) może zapisane, lokalnie, jako:

$$S_f = a\frac{Q^2}{A^{2m}} \tag{5e}$$

Dla formuły Chezy'ego $a = B\ C^{-2}$, m = 1,5, a dla formuły Manninga $a = n^2\ B^{4/3}$, m=5/3. Ponadto dla tego przypadku równanie (45) staje się liniowe, ponieważ:

$$V = 0.5\,L\,(\,A_1(t) + A_2(t)] \tag{29a}$$

Nieliniowy skupiony model stanu dla uproszczonego przypadku może być opisany za pomocą następujących równań.
Równania ciągłości:

$$\frac{dV}{dt} = Q_1(t) - Q_2(t) \tag{15c}$$

równania dynamicznego:

$$(Q_2^{1/m} - Q_1^{1/m})\,b^{-1/2m} = \beta\,(1-b) \tag{47}$$

oraz równania retencji:

$$V = \gamma(Q_2^{1/m} + Q_1^{1/m})\,b^{-1/2m} \tag{48}$$

gdzie:

$$\gamma = 0.5LS_o^{1/2m}a^{1/2m} \tag{49}$$

$$\beta = S_o^{1+1/2m}a^{-1/2m}L/e \tag{50}$$

Dla przypadku liniowej krzywej przepływu (gdy m=1), model jest ciągle nieliniowy z powodu zmiennej b, która odzwierciedla pętlę histerezy w zależności od napełnienia.

5.2. Linearyzacja NSMS dla kanału prostokątnego (LNSMS)

Układ równań (15c), (47), (48) opisujący NSMS dla szerokiego koryta prostokątnego zostanie teraz przybliżony za pomocą modelu liniowego wokół stanu ustalonego Q_o, b=1. Zmiana dopływu na górnym końcu odcinka rzeki spowoduje odpowiednie liniowe zmiany pozostałych zmiennych:

$$Q_1(t)=Q_o+Q_1^{'};\quad Q_2(t)=Q_o+Q_2^{'};\quad b(t)=1+b';\quad V(t)=V_o+V' \tag{51}$$

Rozwijając układ równań (15c), (47), (48) w szereg Taylora funkcji czterech zmiennych i pozostawiając tylko przyrosty pierwszego rzędu, otrzymuje się liniowy system równań:

$$\frac{dV^{'}}{dt}=Q_1^{'}(t)-Q_2^{'}(t) \tag{52a}$$

$$\frac{Q_o^{1/m-1}}{m}[Q_2^{'}(t)-Q_1^{'}(t)]=-\beta b' \tag{52b}$$

$$V'(t)=\frac{\gamma}{m}Q_o^{1/m-1}[Q_2^{'}(t)+Q_1^{'}(t)]-\frac{\gamma}{m}Q_o^{1/m}b' \tag{52c}$$

w którym parametry określane są dla warunków początkowych. Z równania (52b) może zostać wyznaczony przyrost b':

$$b'=-\frac{Q_o^{1/m-1}}{m\beta}[Q_2^{'}(t)-Q_1^{'}(t)] \tag{53}$$

Podstawiając wzór (53) do równania retencji (52c) uzyskuje się przyrost retencji wyrażony za pomocą przyrostów dopływu i odpływu:

$$V'(t)=D_1\,Q_1^{'}(t)+D_2\,Q_2^{'}(t) \tag{54}$$

gdzie:

$$D_1=\frac{\gamma}{m}(1-\frac{1}{\beta m}Q_o^{1/m})Q_o^{1/m-1} \tag{55}$$

$$D_2=\frac{\gamma}{m}(1+\frac{1}{\beta m}Q_o^{1/m})Q_o^{1/m-1} \tag{56}$$

Równanie (55) jest równaniem retencji modelu Muskingum, obowiązującym dla przyrostów wokół stanu ustalonego. Parametry modelu Muskingum:

$$K=D_1+D_2 \tag{57a}$$

$$\alpha=D_1/K \tag{57b}$$

są funkcjami charakterystyk odcinka rzeki γ, β i m) oraz przepływu:

$$K = 2\gamma Q_o^{1/m-1} / m \tag{58a}$$

$$\alpha = 0.5\,(1 - \frac{1}{\beta m} Q_o^{1/m}) \tag{58b}$$

Liniowa aproksymacja NSMS dla odchyleń od stanu ustalonego okazuje się być klasycznym liniowym modelem Muskingum z parametrami określonymi przez równania (58a) i (58b). Podstawiając równanie (49) na γ oraz (50) na β otrzymuje się:

$$K = L / mu_o \tag{59a}$$

$$\alpha = 0.5(1 - \frac{e}{m}\frac{y_o}{S_o L}) \tag{59b}$$

Wyniki te są zgodne z wynikami uzyskanymi przez Dooge'a (1973) za pomocą techniki dopasowywania momentów pomiędzy kompletnym rozwiązaniem liniowym równania St. Venanta a modelem Muskingum. Jednakże, jeśli człony inercyjne są zaniedbane, jeśli e=1, to równanie dla parametru α modelu Muskingum (59b), uzyskane przy odpowiednich zamianach zmiennych z wykorzystaniem równania (13):

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{Q}{2B\,S_o c_k L} \tag{41}$$

jest dokładnie takie samo, jak użyte w *Discrete Muskingum Method* (Cunge 1969, Koussis 1978, Ponce i Yevjevich 1978).

6. PODSUMOWANIE

W pracy porównano dwie hydrodynamiczne metody wyznaczania parametrów modelu Muskingum. W metodzie pierwszej najpierw zlinearyzowano równania St. Venata. Następnie zredukowano równanie dynamiki do postaci diagnostycznej, wyrażając pochodną przyrostu przepływu względem czasu, za pomocą pochodnej przyrostu przepływu względem długości. Z kolei zależność między przyrostami pierwszego rzędu przepływu i powierzchnią przekroju poprzecznego została sprowadzona do postaci skupionej, przy założeniu ich liniowej zmienności wzdłuż odcinka rzeki. Na koniec porównano uzyskane równanie z równaniem modelu Muskingum i otrzymano hydrodynamiczne oszacowanie jego parametrów.

W metodzie alternatywnej postępowano w odwrotnej kolejności. Najpierw wyprowadzono nieliniowy model stanu z równań St. Venanta. Następnie zredukowano model St. Venanta do modelu fali dyfuzyjnej, pomijając człony reprezentujące działanie sił inercyjnych. Nieliniowy model fali dyfuzyjnej został skupiony przy założeniu średniego nachylenia poziomu wody na całej długości odcinka rzeki. Aproksymacja liniowa uzyskanego modelu odpowiada modelowi Muskingium i daje teoretyczną ocenę jego parametrów.

Obie metody prowadzą do tego samego oszacowania parametrów modelu Muskingum, jeżeli postać diagnostyczna równania dynamiki w metodzie pierwszej będzie uzyskana przez pominięcie pochodnej przyrostu przepływu względem czasu, a nie wyrażenie jej za pomocą pochodnej przyrostu przepływu względem długości.

BIBLIOGRAFIA

Cunge J.A., 1969, *On the subject of a flood propagation computation method (Muskingum method).* Journal of Hydraulic Research, 7, s. 205-230.

Dooge, J.C.I., 1973, *Linear Theory of Hydrologic Systems*. U.S. Aoricultural Research Service Technical Bulletin No. 1468.

Dooge J.C.I., Strupczewski W.G., Napiórkowski J.J., 1982, *Hydrodynamic derivation of storage parameters of the Muskingum model*. Journal of Hydrology, 54, s. 371-387.

Dooge J.C.I., Napiórkowski J.J., Strupczewski W.G., 1987a, *The linear downstream response of a generalized uniform channel*. Acta Geophysica Polonica, 35, 3, s. 279-293.

Dooge J.C.I, Napiórkowski J.J., Strupczewski W.G., 1987b, *Properties of the generalized linear downstream channel response*. Acta Geophysica Polonica, 35, 4, s. 405-416.

Kang L.,, Zhou L., Zhang S., 2017, *Parameter Estimation of Two Improved Nonlinear Muskingum Models Considering the Lateral Flow Using a Hybrid Algorithm*. Water Resources Management, 31, s. 4449-4467.

Koussis A.O., 1978, T*heoretical Estimations of Flood Routing Parameters*. Journal of the Hydraulics Division, ASCE, 104, l, s. 109-115.

Lighthill M.H., Whitham G.B., 1955. *On kinematic waves*, 1. *Flood movements in long rivers*. Proc. R. Soc. London, Ser. A, 229, s. 281—316.

McCarthy G.T. 1939, *The unit hydrograph and flood routing*, Providence, R.I. : Army Engineer District, Providence.

Napiórkowski J.J., 1992, *Linear theory of open channel flow*. In: Prof. Dooge Festschrift, EGS Monograph Series, editor J.P. O'Kane, s.3-14, Elsevier.

Napiórkowski J.J., Strupczewski W.G., Dooge J.C.I., 1981, *Lumped nonlinear flood routing model and its simplification to the Muskingum model*. Proc. International Symposium on Rainfall- Runoff Modelling, May 18-21, Mississippi, 543-552.

Perumal M., Tayfur G., Rao C. M., Gurarslan G., 2017, *Evaluation of a physically based quasi-linear and a conceptually based nonlinear Muskingum methods*, Journal of Hydrology, 546, s. 437–449.

Ponce V.M., Yevjevich V., 1978, *Muskingum - Cunge Method with Variable Parameters*. Journal of the Hydraulics Division, ASCE, V-1. 104, 12, s. 1663 - 1667.

Song X-M, Kong F-Z, Zhu Z-X, 2011, *Application of Muskingum routing method with variable parameters in ungauged basin.* Water Science and Engineering, 4, 1, s. 1-12, doi:10.3882/j.issn.1674-2370.2011.01.001.

Strupczewski W.G., Kundzewicz Z.W., 1980, *Muskingum method revisited.* Journal of Hydrology, 48, 3-4, s. 327–342.

Strupczewski W.G., Napiórkowski J.J., 1986, *Asymptotic behaviour of physically based multiple Muskingum model* . Multivariate Analysis of Hydrologic processes, Proc. Fourth International Hydrology Symposium, July 15-17 1985, edited by Hsieh Wen Shen, Fort Collins, Colorado: s. 372-381.

Strupczewski W.G., Napiórkowski J.J., 1989, *Properties of the distributed Muskingum model*. Acta Geophysica Polonica, 37, 3, s. 229-314.

Strupczewski W.G., Napiórkowski J.J., 1990, *What is the distributed delayed Muskingum model?*, Hydrological Sciences Journal, 35, 1-2, s. 65-78.

Strupczewski W.G., Napiórkowski J.J., Dooge J.C.I., 1989, *The Distributed Muskingum model.* Journal of Hydrology, 111, 1-4, s. 235-257.

Adres do korespondencji - Corresponding autor: prof. dr hab. inż. Jarosław Napiórkowski,
Instytut Geofizyki Polskiej Akademii Nauk, ul. Księcia Janusza 64, 01-452 Warszawa,
e-mail: j.napiorkowski@igf.edu.pl